

Dr. Aurel Diamandescu

MATEMATICI GENERALE

SINTEZE

(TEORIE ȘI PROBLEME)

CAPITOLUL 1

Funcții continue

Problema 1

Folosind definiția $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că

a). $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x - 5) = 9$;

b). $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-2}{|x-5|} = +\infty$;

Rezolvare. Definiția $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcții reale de variabilă reală într-un punct este Definiția 4.1.6.

a). Limita $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x - 5) = 9$ se încadrează în pct. 1 al Definiției amintite. Ca urmare, avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x - 5) = 9 &\iff \\ (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 2| < \delta &\implies \\ \implies |x^3 + 3x - 14| < \varepsilon). \end{aligned}$$

Fie un $\delta \in (0, 1)$ ce va fi determinat ulterior și fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < |x - 2| < \delta$. Atunci,

$$\begin{aligned} |x^3 + 3x - 5 - 9| &= |x^3 + 3x - 14| = \\ &= |(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 15(x - 2)| \leq \\ &\leq |x - 2|^3 + 6|x - 2|^2 + 15|x - 2| < \\ &< \delta^3 + 6\delta^2 + 15\delta < 22\delta. \end{aligned}$$

Ca urmare, pentru $\varepsilon > 0$ dat, alegem $\delta(\varepsilon) = \min\{1, \frac{\varepsilon}{22}\}$ și atunci, pentru $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < |x - 2| < \delta(\varepsilon)$ avem $|x^3 + 3x - 5 - 9| < \varepsilon$.

Așadar, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3x - 5) = 9$

b). Limita $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-2}{|x-5|} = +\infty$ se încadrează în pct. 2 al Definiției amintite. Ca urmare, $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-2}{|x-5|} = +\infty \iff$

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 5| < \delta \implies \implies \frac{x-2}{|x-5|} > \varepsilon).$$

Fie un $\delta > 0$ ce va fi determinat ulterior și fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < |x - 5| < \delta$. Atunci,

$$\frac{x-2}{|x-5|} = \frac{x-5+3}{|x-5|} = \frac{x-5}{|x-5|} + \frac{3}{|x-5|} > \frac{3}{\delta} - 1.$$

Condiția $\frac{3}{\delta} - 1 \geq \varepsilon$ se verifică pentru $\delta \in (0, \frac{3}{\varepsilon+1}]$.

Ca urmare, pentru $\varepsilon > 0$ dat, alegem $\delta(\varepsilon) = \frac{3}{\varepsilon+1}$ și atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < |x - 5| < \delta(\varepsilon)$ avem $\frac{x-2}{|x-5|} > \varepsilon$.

Așadar, $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-2}{|x-5|} = +\infty$.

Observații. 1. Pentru o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ prezintă 9 cazuri diferite, după cum a și ℓ sunt finite sau $\pm\infty$. Toate aceste cazuri sunt cuprinse în Definiția 4.1.6. Două dintre ele au fost ilustrate mai sus.

2. Din cele de mai sus se poate deduce următoarea schemă de aplicare a definiției $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcții într-un punct. Ne situăm în cazul a și ℓ finite. Pentru un $\delta > 0$ și x astfel încât $|x - a| < \delta$, în expresia $|f(x) - \ell|$ punem în evidență pe $|x - a|$ și facem majorarea $|f(x) - \ell| \leq F(\delta)$. Punem condiția $F(\delta) < \varepsilon$ și rezolvăm această inecuație cu necunoscuta δ , obținând soluția $\delta < g(\varepsilon)$. Luând $\delta(\varepsilon)$ în intervalul $(0, g(\varepsilon))$, condiția din definiție se verifică și ca urmare am demonstrat că $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

În cazul în care a și ℓ nu sunt finite, se procedează asemănător.

3. Facem precizarea că și în domeniul limitelor de funcții avem un analog al Principiului cleștelui de la șiruri (vezi Teoremele 4.1.7, 4.1.8).

4. Cele spuse mai sus rămân valabile și pentru limitele laterale, cu adaptările corespunzătoare.

Problema 2

Se dau funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases},$$

unde a este un număr real nenul.

Să se studieze existența limitelor $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$ și $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$.

Rezolvare. Folosim Definiția 1.2.10 a compunerii a două funcții și Criteriul lui Heine (Teorema 4.1.1) privind limita unei funcții într-un punct.

Se constată că $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$ nu există în timp ce $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$ există și este egală cu 0. ■

Observații. 1. Criteriul lui Heine (Teorema 4.1.1 sau varianta sa mai rafinată, Teorema 4.1.2) este o condiție necesară și suficientă de existență a limitei unei funcții într-un punct. El se mai numește și Definiția cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct.

Criteriul lui Heine și diverse variante ale lui sunt des utilizate în probleme privind limita unei funcții într-un punct.

Folosirea Criteriului lui Heine în probleme privind existența limitei unei funcții într-un punct se face după modelul următor: O funcție $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are limita ℓ în punctul $a \in D'$ dacă se verifică condiția: oricare ar fi șirul (x_n) de elemente din D , diferite de a și convergent la a , avem $\ell = \lim f(x_n)$.

Folosirea Criteriului lui Heine în probleme privind inexistența limitei unei funcții într-un punct se face după modelul următor: O funcție $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu are limită (nu are limita ℓ) în punctul $a \in D'$ dacă se verifică condiția: există un șir (x_n) de elemente din D , diferite de a și convergent la a și astfel încât $\lim f(x_n)$ nu există (respectiv, nu are limita ℓ). Practic, se determină două șiruri (x'_n) (x''_n) din D , convergente la a astfel încât $\lim f(x'_n)$ și $\lim f(x''_n)$ sunt diferite între ele (respectiv, una dintre ele diferită de ℓ) (acum, șirul (x_n) este șirul intercalat $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$).

2. Stabilirea existenței sau inexistenței limitei unei funcții într-un punct se poate face și cu definiția (în diversele ei variante - cu vecinătăți

sau $\varepsilon - \delta$) sau folosind proprietățile funcțiilor care au limită într-un punct.

3. Problema se poate rezolva și altfel:

– făcând compunerea celor două funcții

– aplicând Limita funcției compuse (Teorema 4.1.5).

Iată, pe scurt, rezolvarea cu această ultimă idee:

Se demonstrează mai întâi că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Se mai

observă că $f(x) \neq 0$ pentru $x \neq 0$ și că g nu are această proprietate.

Referitor la limita $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x)$, toate condițiile din Teorema 4.1.5

se verifică. Ca urmare, $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = 0$.

Referitor la limita $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$, toate condițiile din Teorema 4.1.5,

cu excepția uneia, se verifică. Ca urmare, Teorema nu se poate aplica.

Se vede de aici că ipoteza iii) din Teorema 4.1.5 este esențială.

4. În condițiile Teoremei 4.1.5, se spune că făcând substituția (sau schimbarea de variabilă) $y = f(x)$ avem

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = z_0, \text{ unde } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = y_0.$$

Problema 3

Să se calculeze următoarele limite:

i). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$; ii). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$; iii). $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$; $m, n \in \mathbb{N}$.

iv). $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{x + 2}{\sqrt{2x^4 - x^2 - 1}}$.

Rezolvare. i). Deoarece $\lim_{x \rightarrow 1} (x^m - 1) = 0$, limita prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Pentru îndepărtarea ei, descompunem polinoamele în factori și simplificăm:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1} = \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

ii). Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^m - 1) = \infty$, limita prezintă nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$. Pentru îndepărtarea ei, scoatem factori comuni pe aceia care provoacă nedeterminarea:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m(1 - x^{-m})}{x^n(1 - x^{-n})} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{m-n} \frac{1 - x^{-m}}{1 - x^{-n}} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } m = n \\ 0, & \text{dacă } m < n \\ \infty, & \text{dacă } m > n \end{cases} . \end{aligned}$$

iii). Se procedează asemănător ca mai sus, cu o mică schimbare în final:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^m(1 - x^{-m})}{x^n(1 - x^{-n})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{m-n} \frac{1 - x^{-m}}{1 - x^{-n}} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{dacă } m = n \\ 0, & \text{dacă } m < n \\ \infty, & \text{dacă } m > n, m - n = \text{nr. par} \\ -\infty, & \text{dacă } m > n, m - n = \text{nr. impar} \end{cases} . \end{aligned}$$

iv). Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{\sqrt{2x^4-x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x^2\sqrt{2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}}$
 $= 0$, limita prezintă nedeterminarea $0 \cdot \infty$. Pentru îndepărtarea ei, amplificăm cu $\sin u(x)$, unde

$$u(x) = \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{2x^4-x^2-1}} \rightarrow 0 \text{ pentru } x \rightarrow \infty$$

și folosim limita fundamentală a sinusului, vjj):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{2x^4-x^2-1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{u(x)}{\sin u(x)} \cdot \sin u(x) = \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{x+2}{\sqrt{2x^4-x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1+\frac{2}{x})}{x^2\sqrt{2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \end{aligned}$$

Se vede că nedeterminarea $0 \cdot \infty$ s-a transformat - prin limita fundamentală a sinusului - în nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$ și aceasta a fost îndepărtată prin simplificarea forțată cu x^2 .

Observație. Reamintim câteva chestiuni în legătură cu calculul limitelor de funcții.

Se știe că limita sumei a două funcții este egală cu suma limitelor, dacă acestea există și suma lor are sens; nu are sens operația $\infty - \infty$. În acest caz se recomandă transformarea funcției de sub limită; de exemplu, în cazul sumei sau diferenței de radicali, este indicată amplificarea cu conjugata; uneori, un factor comun forțat este benefic.

Alteori, se poate folosi o limită fundamentală, de exemplu, j) sau jj). de mai jos.

$$\begin{aligned} \text{Exemple. } 1^\circ. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Se vede că limita a prezentat nedeterminarea $\infty - \infty$; amplificând cu conjugata, limita prezintă nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$. Scoaterea unui factor forțat și simplificarea cu el îndepărtează această nedeterminare și permite aplicarea regulii generale: limita unui cât (Teorema 4.1.6).

$$2^\circ. \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{e^{-x}}{x} + 1 \right) = \lim_{y \rightarrow \infty} -y \left(1 - \frac{e^y}{y} \right) = +\infty.$$

Se vede că limita a prezentat nedeterminarea $\infty - \infty$; scoaterea factorului forțat x și schimbarea de variabilă $x = -y$ conduce la limita unui produs în care fiecare factor are limita $-\infty$. În sfârșit, regula generală privind limita unui produs (vezi din nou Teorema 4.1.6) ne dă rezultatul final.

Se știe că limita produsului a două funcții este egală cu produsul limitelor, dacă acestea există și produsul lor are sens; nu are sens operația $0 \cdot \infty$. În acest caz, se recomandă transformarea funcției de sub limită astfel încât unul din factori să aibă limita diferită de 0 și de $\pm\infty$; limita va fi decisă de factorul rămas. Uneori, se poate folosi o limită fundamentală, de exemplu, v) sau vj).

Exemple. $1^\circ. \lim_{x \searrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y} = \infty$. Se vede că limita (laterală) a prezentat nedeterminarea $0 \cdot \infty$. O schimbare de variabilă convenabilă transformă limita în limita fundamentală v).

$2^\circ. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x + 2} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x + 2} \cdot (x e^x) = 1 \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \left(-\frac{y}{e^y} \right) = 0$. Se vede că limita a prezentat nedeterminarea $0 \cdot \infty$. Separarea unui factor care are limită finită și o schimbare de variabilă convenabilă transformă limita în limita fundamentală v).

Se știe că limita câtului a două funcții este egală cu câtul limitelor, dacă acestea există și câtul lor are sens; nu au sens operațiile $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$. Dacă limita în cauză prezintă una dintre aceste nedeterminări, pentru îndepărtarea ei se efectuează anumite transformări sau se aplică anumite formule - numite limite fundamentale. De exemplu, la i) am descompus polinoamele în factori și am simplificat, iar la ii) și iii) am scos factori comuni forțat pentru ca factorii rămași să aibă limită finită, rămânând ca factorii apăruiți să decidă limita.

Se știe că limita unei puteri este egală cu puterea limitelor, dacă

acestea există și puterea lor are sens; nu au sens operațiile 1^∞ , 0^0 , ∞^0 . Dacă limita în cauză prezintă nedeterminarea 1^∞ , pentru îndepărtarea ei se folosește limita fundamentală a lui e, adică limita $(1 + \frac{1}{x})^x$ de mai jos. Dacă limita în cauză prezintă una din nedeterminările 0^0 sau ∞^0 , atunci se logaritizează, nedeterminarea transformându-se în $0 \cdot \infty$.

Exemple. 1°. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{x}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1}} = e$. Se vede că limita a prezentat nedeterminarea 1^∞ . Am pus în evidență la bază pe 1, astfel că am ales $u(x) = \frac{1}{x+1}$. Am transformat expresia (funcția) de sub limită, pentru a putea aplica limita fundamentală $(1 + \frac{1}{x})^x$.

2°. $\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} e^{\ln x^x} = e^{\lim_{x \searrow 0} \ln x^x} = e^{\lim_{x \searrow 0} x \ln x} = e^0 = 1$. Se vede că limita a prezentat nedeterminarea 0^0 . S-a logaritmat, adică s-a folosit identitatea $a = e^{\ln a}$ (ce rezultă din definiția logaritmului unui număr într-o bază), apoi s-a permutat limita cu exponențierea și limita s-a redus la limita fundamentală $x \ln x$.

3°. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x} = e^0 = 1$. Se vede că limita a prezentat nedeterminarea ∞^0 . S-a logaritmat, apoi s-a permutat limita cu exponențierea și limita s-a redus la limita fundamentală $\frac{1}{x} \ln x$. Se mai observă că prin schimbarea de variabilă $y = \frac{1}{x}$, limita se reduce la cea anterioară.

Prezentăm mai jos *limite fundamentale* mai des folosite:

Fie funcțiile polinomiale $P, Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

$$Q(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n,$$

unde a_0 și b_0 sunt nenule. Atunci:

$$j). \lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_0 < 0 \end{cases};$$

Pe scurt, $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = a_0 \cdot \infty$.

$$jj). \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{dacă } a_0 > 0, m = \text{nr. par} \\ -\infty & \text{dacă } a_0 > 0, m = \text{nr. impar} \\ -\infty & \text{dacă } a_0 < 0, m = \text{nr. par} \\ +\infty & \text{dacă } a_0 < 0, m = \text{nr. impar} \end{cases};$$

Pe scurt, $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = a_0 \cdot (-\infty)^m$.

- jjj). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m < n \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } m = n \\ +\infty, & \text{dacă } m > n, a_0 b_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } m > n, a_0 b_0 < 0 \end{cases}$
- jv). $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{P(-y)}{Q(-y)}$ și se aplică rezultatul de la jjj).
- v). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{b^x} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}, b > 1;$
- vj). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^m x}{x^n} = 0, \text{ sau } \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln^m x = 0, \forall n, m \in \mathbb{N}.$

În cele ce urmează, $u(x)$ este o funcție cu proprietatea

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0 \text{ și } u(x) \neq 0 \text{ pentru } x \neq a.$$

- vjj). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1;$
- vjjj). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} u(x)}{u(x)} = 1;$
- jx). $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \lim_{x \rightarrow a} (1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}} = e.$
- x). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} = 1;$
- xj). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = \operatorname{lmb}; \lim_{x \rightarrow a} \frac{b^{u(x)} - 1}{u(x)} = \operatorname{lmb}; b > 0, b \neq 1;$
- xjj). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r; \lim_{x \rightarrow a} \frac{(1+u(x))^r - 1}{u(x)} = r; \forall r \in \mathbb{R}.$

Problema 4

Să se determine numerele reale a, b astfel ca dreapta de ecuație $y = 3x + 2$ să fie asimptotă spre $+\infty$ pentru graficul funcției

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{|x^2 - 1| - x}{ax + b}.$$

Cu a și b astfel determinate, să se determine celelalte asimptote la graficul funcției.

Rezolvare. Se știe că dreapta $y = mx + n$ este asimptotă spre $+\infty$ pentru graficul funcției f dacă și numai dacă sunt finite limitele

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx).$$

Asimptota se numește oblică când $m \neq 0$ și orizontală când $m = 0$.

De asemenea, se știe că dreapta $x = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, este asimptotă verticală la graficul funcției f dacă și numai dacă α este punct de acumulare pentru domeniul de definiție D al funcției și cel puțin una din limitele laterale $\lim_{x \nearrow \alpha} f(x)$,

$\lim_{x \searrow \alpha} f(x)$ este infinită.

Concret, în problemă punem pentru început condițiile

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 1| - x}{x(ax + b)} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{|x^2 - 1| - x}{ax + b} - 3x \right) = 2.$$

În calculul acestor limite, ținem seama că într-o vecinătate a lui $+\infty$, avem $|x^2 - 1| = x^2 - 1$. Ca urmare, conform regulilor de calcul cu limite de funcții,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x^2 - 1| - x}{x(ax + b)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - x}{x(ax + b)} = \frac{1}{a} = 3, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{|x^2 - 1| - x}{ax + b} - 3x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1 - x}{ax + b} - \frac{1}{a}x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x^2 - 1 - x) - x(ax + b)}{a(ax + b)} = \frac{-(a + b)}{a^2} = 2. \end{aligned}$$

De aici rezultă $a = \frac{1}{3}$ și $b = -\frac{5}{9}$.

Ca urmare, $f: \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x^2 - 1| - x}{\frac{1}{3}x - \frac{5}{9}}$.

Se constată cu ușurință că dreapta $y = 3x + 2$ este asimptotă oblică la graficul funcției f și la $-\infty$. Apoi, din

$$\lim_{x \nearrow \frac{5}{3}} f(x) = -\infty \quad \text{și} \quad \lim_{x \searrow \frac{5}{3}} f(x) = +\infty,$$

avem că dreapta $x = \frac{5}{3}$ este asimptotă verticală de ambele părți la graficul funcției f . ■

Observații. 1. În general, o funcție nu poate să admită atât asimptotă oblică cât și asimptotă orizontală spre $+\infty$ (respectiv $-\infty$). Remarcăm faptul că pentru o funcție dată, pot avea loc diverse situații: – să existe asimptote oblice atât spre $+\infty$ cât și spre $-\infty$ (distincte sau nu),

- să existe asimptote orizontale atât spre $+\infty$ cât și spre $-\infty$ (distincte sau nu),
- să existe asimptotă oblică spre $+\infty$ cât și asimptotă orizontală spre $-\infty$ (sau invers),
- să existe asimptotă spre $+\infty$ dar să nu existe asimptotă spre $-\infty$ (sau invers),
- să nu existe asimptote atât spre $+\infty$ cât și spre $-\infty$,
- să existe sau să nu existe asimptote verticale în fiecare din aceste situații.

În sfârșit, mai remarcăm faptul că asimptotele la graficul unei funcții se mai numesc, uneori, asimptotele funcției.

2. Pentru o funcție rațională $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, D fiind domeniul maxim de definiție, avem reguli simple în ceea ce privește existența asimptotelor:

- i). graficul lui f are asimptotă orizontală (aceeași spre $+\infty$ și spre $-\infty$) dacă și numai dacă polinoamele P și Q au grade egale; în acest caz, asimptota orizontală este $y = n$, unde $n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$.
- ii). graficul lui f are asimptotă oblică (aceeași spre $+\infty$ și spre $-\infty$) dacă și numai dacă $\text{grad } P = 1 + \text{grad } Q$; în acest caz, asimptota oblică este $y = mx + n$, unde $mx + n$ este câtul împărțirii polinomului P la polinomul Q .
- iii). graficul lui f are asimptota verticală $x = a$ dacă și numai dacă $Q(a) = 0$.

3. În mod cu totul asemănător, se poate introduce noțiunea de curbă asimptotă: curba C de ecuație $y = g(x)$ este curbă asimptotă către $+\infty$ ($-\infty$) la graficul lui f dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$, respectiv $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Este clar că în acest caz, putem vedea curba de ecuație $y = f(x)$ drept curbă asimptotă la graficul lui g .

Exemplu: graficul funcției $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$ admite curba asimptotă $y = x^2$, atât spre $+\infty$ cât și spre $-\infty$.

Se constată ușor că graficul unei funcții raționale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ admite drept curbă asimptotă o parabolă de ecuație $y = ax^2 + bx + c$ dacă și numai dacă $\text{grad } P = 2 + \text{grad } Q$; în acest caz, $ax^2 + bx + c$ este câtul împărțirii polinomului P la polinomul Q .

Problema 5

Să se studieze continuitatea funcțiilor:

$$\begin{aligned} \text{a). } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) &= \begin{cases} x^2 + x + 1, & \text{dacă } x < 1 \\ \alpha, & \text{dacă } x = 1 \\ x^2 - 2x + \beta, & \text{dacă } x > 1 \end{cases} ; \\ \text{b). } h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) &= \begin{cases} x^3, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} . \end{aligned}$$

Rezolvare. a). Avem în vedere Definiția 4.2.9, Teorema 4.2.5 și Exemplitul 4.2.10. Pe fiecare din intervalele deschise $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$, funcția f este continuă, fiind funcție polinomială. Rămâne de studiat continuitatea în punctul $x = 1$. Avem

$$\begin{aligned} f(1 - 0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (x^2 + x + 1) = 3 \\ f(1 + 0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - 2x + \beta) = \beta - 1 \end{aligned}$$

și $f(1) = \alpha$. Condiția de continuitate a lui f în punctul $x = 1$ se scrie $3 = \beta - 1 = \alpha$ și ne dă $\alpha = 3$ și $\beta = 4$.

Tragem următoarele concluzii:

– pentru $\alpha \neq 3$ și $\beta \neq 4$, f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; punctul $x = 1$ este punct de discontinuitate de speța întâia (vezi Definiția 4.2.12); funcția f nu este continuă la stânga și nici la dreapta în punctul $x = 1$.

– pentru $\alpha = 3$ și $\beta \neq 4$, f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; punctul $x = 1$ este punct de discontinuitate de speța întâia; în plus, funcția f este continuă la stânga în punctul $x = 1$ dar nu este continuă la dreapta în acest punct.

– pentru $\alpha \neq 3$ și $\beta = 4$, f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; punctul $x = 1$ este punct de discontinuitate de speța întâia; în plus, funcția f este continuă la dreapta în punctul $x = 1$ dar nu este continuă la stânga în acest punct.

– pentru $\alpha = 3$ și $\beta = 4$, funcția f este continuă pe \mathbb{R} .

b). Deoarece funcția h nu are ramurile definite pe subintervale ale lui \mathbb{R} , nu se poate proceda ca mai sus. Deoarece

nu se știe în ce punct funcția este continuă, vom folosi Criteriul lui Heine privind limita unei funcții într-un punct (Teoremele 4.1.1, 4.1.2) și privind continuitatea unei funcții într-un punct (Teorema 4.2.1). Fie deci $a \in \mathbb{R}$ un punct în care funcția h este continuă. Ca urmare, pentru orice șir (x_n) de numere reale cu $\lim x_n = a$, avem $\lim h(x_n) = h(a)$. Presupunem că $a \in \mathbb{Q}$. Fie șirul de numere iraționale $(a + \frac{\pi}{n})$, convergent la a . Atunci, $\lim h(a + \frac{\pi}{n}) = h(a)$ ne dă $a^2 = a^3$. Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, fie un șir (x'_n) de numere raționale convergent la a . Atunci, $\lim h(x'_n) = h(a)$ ne dă $\lim x_n^3 = a^2$, adică $a^3 = a^2$. Tragem concluzia că dacă funcția h este continuă în punctul $a \in \mathbb{R}$, atunci $a^2 = a^3$ (adică $a = 0$ sau $a = 1$). De asemenea, mai tragem concluzia că dacă $a^2 \neq a^3$, atunci funcția h nu este continuă în punctul $a \in \mathbb{R}$.

Demonstrăm că funcția este continuă în orice punct $a \in \mathbb{R}$ pentru care $a^2 = a^3$. Fie (x_n) un șir oarecare de numere reale, astfel încât $\lim x_n = a$. Se poate întâmpla una din situațiile:

- șirul (x_n) are un număr finit de termeni raționali iar ceilalți sunt iraționali;
- șirul (x_n) are un număr finit de termeni iraționali iar ceilalți sunt raționali;
- șirul (x_n) are un număr infinit de termeni raționali și un număr infinit de termeni iraționali.

În prima situație, prin eliminarea termenilor raționali, șirul (x_n) are numai termeni iraționali. Ca urmare, șirul imagine $(h(x_n))$ este șirul (x_n^2) și evident, $\lim h(x_n) = a^2$.

În a doua situație, prin eliminarea termenilor iraționali, șirul (x_n) are numai termeni raționali. Ca urmare, șirul imagine $(h(x_n))$ este șirul (x_n^3) și evident, $\lim h(x_n) = a^3$.

În a treia situație, șirul imagine $(h(x_n))$ este format din exact două subsșiruri $(x_{k_n}^3)$ și $(x_{p_n}^2)$, convergente la a^3 respectiv a^2 . Cum $a^2 = a^3$, șirul imagine $(h(x_n))$ este convergent (vezi Propoziția 3.1.5) și $\lim h(x_n) = a^2 = a^3$.

Deci, indiferent de situație, $\lim h(x_n) = h(a)$. Funcția h este continuă în orice punct $a \in \mathbb{R}$ pentru care $a^2 = a^3$.

Concluzia finală este aceea că funcția h este continuă în punctele $x = 0$ și $x = 1$ și este discontinuă în toate celelalte puncte din \mathbb{R} .

Să precizăm natura punctelor de discontinuitate ale lui h . Fie deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ un astfel de punct. Fie (a_n) un șir de numere raționale și (b_n) un șir de numere iraționale, ambele convergente la a . Avem

$$\lim h(a_n) = \lim a_n^3 = a^3 \text{ și } \lim h(b_n) = \lim b_n^2 = a^2.$$

Cum $\lim h(a_n) \neq \lim h(b_n)$, rezultă că funcția h nu are limită în punctul a .

Așadar, punctele de discontinuitate ale funcției h sunt de speța a doua. ■

Observații. 1. Funcțiile elementare - polinomiale, raționale, trigonometrice, puteri reale, exponențiale - sunt continue pe domeniul lor maxim de definiție; în general vorbind, domeniul maxim de definiție al unei astfel de funcții este fie un interval (care poate fi chiar \mathbb{R}) fie o reuniune finită de intervale deschise.

Cele mai simple funcții neelementare sunt cele “definite pe ramuri”, adică de forma funcțiilor f sau g de mai sus.

O funcție neelementară aparte este funcția modul,

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow |x|,$$

a cărei explicitare este

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ x, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}.$$

Funcția modul este continuă pe \mathbb{R} .

Operațiile de adunare, scădere, înmulțire cu scalari, înmulțire, împărțire sau ridicare la putere efectuate cu funcții continue conduc tot la astfel de funcții (vezi Teorema 4.2.3).

Exemple. 1°. Funcțiile $e^x + x^2$, $e^x - x^2$, $x^2 e^x$ sunt continue pe \mathbb{R} , ca sumă, diferență respectiv produsul funcțiilor continue e^x și x^2 ;

2°. Funcția $\frac{e^x}{x^2}$ este continuă pe $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ pentru că este câtul a două funcții continue și numitorul nu se anulează pe D ;

3°. Funcția $2e^x$ este continuă pe \mathbb{R} , ca produsul funcției continue e^x cu scalarul 2, sau ca produsul a două funcții continue: exponențiala e^x și funcția constantă 2.

4°. Funcția $(x^2)^{e^x}$ este continuă pe \mathbb{R} , ca putere a două funcții continue;

5°. Funcția x^{2e^x} este continuă pe $(0, \infty)$, ca putere a două funcții continue; Trebuie observată diferența, datorată domeniului de definiție a funcției de la bază.

De asemenea, compunerea a două funcții continue este tot o funcție continuă. (vezi Teorema 4.2.4).

De exemplu, funcția $f(x) = |x - 2|$ este continuă pe \mathbb{R} ca fiind compunerea $g \circ u$ a funcțiilor continue $u(x) = x - 2$ și $g(x) = |x|$. Menționăm faptul că operațiile de mai sus efectuate fie cu funcții discontinue fie cu funcții discontinue și cu funcții continue conduc fie la funcții continue fie la funcții discontinue. Ilustrăm aceasta prin câteva exemple.

1°. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție discontinuă într-un punct a . Este clar că $f + f = 2f$ este discontinuă în punctul a , în timp ce $f - f = 0$ este continuă pe \mathbb{R} , ca fiind o funcție constantă.

2°. Funcția $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ este discontinuă în fiecare punct din \mathbb{R} . Funcția $f(x) = |u(x)| = 1$ este continuă pe \mathbb{R} .

Se vede de aici că din continuitatea funcției $|g|$ nu rezultă continuitatea funcției g .

3°. În același timp, funcția produs dintre o funcție continuă pe \mathbb{R} și o funcție discontinuă pe \mathbb{R} poate fi continuă pe \mathbb{R} (ca în $0 \cdot u = 0$) sau discontinuă pe \mathbb{R} (ca în $1 \cdot u = u$).

Mai reamintim că o funcție continuă comută cu luarea limitei, fapt deja folosit până acum de mai multe ori.

De asemenea, dacă f și g sunt continue pe D , atunci funcțiile

$$\begin{aligned} \max \{f, g\} : D &\rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \max \{f(x), g(x)\} \\ \min \{f, g\} : D &\rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \min \{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

sunt continue pe D .

În sfârșit, precizăm că toate operațiile de mai sus se pot extinde la un număr finit oarecare de funcții.

2. Un punct $a \in D$ în care funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nu este continuă se numește punct de discontinuitate pentru funcție. Punctul de discontinuitate este de speța întâia dacă funcția are limite laterale finite în acest punct. În caz contrar, punctul de discontinuitate este de speța a doua (vezi Definiția 4.2.12).

Așadar, într-un punct de discontinuitate de speța întâia pentru o funcție, aceasta are limite laterale finite care ori sunt diferite între ele, caz în care funcția nu are limită în punct, ori sunt egale între ele, caz în care funcția are limită (finită) în punct, dar valoarea lor diferă de valoarea funcției în punct.

Într-un punct de discontinuitate de speța a doua pentru o funcție, aceasta ori are ambele limite laterale, dar una dintre ele este infinită, ori cel puțin una din limitele laterale nu există.

Dacă punctul a este punct de discontinuitate de speța întâia pentru f și dacă $f(a) = f(a + 0)$, atunci se spune că f este continuă la dreapta în acest punct (sau că a este punct de continuitate la dreapta pentru f); similar, dacă $f(a) = f(a - 0)$, atunci se spune că f este continuă la stânga în acest punct (sau că a este punct de continuitate la stânga pentru f).

Se poate demonstra că discontinuitățile unei funcții monotone pe un interval sunt numai de speța întâia (vezi în §4.1/4.1.5).

Cele spuse mai sus pot fi interpretate și din punct de vedere al continuității într-un punct: dacă pentru o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru un punct $a \in D$ care este punct de acumulare bilateral pentru D (vezi Definiția 4.1.8) există $f(a - 0)$ și $f(a + 0)$, atunci f este continuă în a dacă și numai dacă $f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$.

3. Se poate demonstra (în mod asemănător ca la pct. c)) un rezultat general:

Dacă funcțiile $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt continue pe \mathbb{R} , atunci funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ f_2(x), & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

este continuă într-un punct $a \in \mathbb{R}$ dacă și numai dacă $f_1(a) = f_2(a)$.

Ca urmare, pentru o astfel de funcție f , mulțimea punctelor de continuitate este $\{x \in \mathbb{R} \mid f_1(x) = f_2(x)\}$.

Problema 6

Să se precizeze care dintre funcțiile

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x + \cos 2x, \\ g_n: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, g_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

este continuă uniform.

Rezolvare. Avem în vedere Definiția 4.2.14.

a). Fie un $\delta > 0$ și $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|x - y| < \delta$.
Avem

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\sin x + \cos 2x - \sin y - \cos 2y| \leq \\ &\leq |\sin x - \sin y| + |\cos 2x - \cos 2y| \leq 3|x - y| < 3\delta. \end{aligned}$$

(s-a ținut cont de formulele trigonometrice

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos 2x - \cos 2y = -2 \sin(x-y) \sin(x+y)$$

precum și de inegalitatea $|\sin x| \leq |x|$, valabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$).

Acum, pentru $\varepsilon > 0$ dat, alegem $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$ și atunci, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$, avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Conform Definiției, funcția f este uniform continuă.

b). Începem cu un caz simplu: $n = 1$. Evident, pentru $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$|g_1(x) - g_1(y)| = |x - y|,$$

de unde se vede că este suficient să alegem, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, pentru ca, dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|g_1(x) - g_1(y)| < \varepsilon$.

Conform Definiției, funcția g_1 este uniform continuă.

Pentru $n \geq 2$ și $m \in \mathbb{N}$ avem

$$\begin{aligned} |g_n(m + \frac{1}{m}) - g_n(m - \frac{1}{m})| &= (m + \frac{1}{m})^n - (m - \frac{1}{m})^n = \\ &= 2[C_n^1 m^{n-2} + C_n^3 m^{n-6} + \dots] \geq 2n, \end{aligned}$$

ceea ce arată că diferența $|g_n(m + \frac{1}{m}) - g_n(m - \frac{1}{m})|$ nu poate fi mai mică decât 1, chiar dacă diferența dintre argumentele $m + \frac{1}{m}$ și $m - \frac{1}{m}$ poate fi oricât de mică.

Concluzia: funcția g_n , $n \geq 2$, nu este uniform continuă ■

Observație. Reamintim definiția $\varepsilon - \delta$ a continuității unei funcții reale de variabilă reală într-un punct (vezi Definiția 4.2.5, pct. 1):

$$\begin{aligned} \text{funcția } f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ este continuă în punctul } a \in D &\iff \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, a) > 0 : \forall x \in D, |x - a| < \delta &\implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Aici, δ depinde, în general, de ε și de punctul a . Independența lui δ de a înseamnă un anumit tip de continuitate a funcției f și anumite continuitate uniformă.

Așadar, definiția continuității uniforme a unei funcții reale de variabilă reală se reformulează astfel:

$$\begin{aligned} \text{funcția } f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ este continuă uniform pe } D &\iff \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in D, |x - y| < \delta &\implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

(vezi Definiția 4.2.14). Evident, o funcție continuă uniform pe D este continuă în fiecare punct din D (adică pe D). Să mai remarcăm că proprietatea de continuitate a unei funcții într-un punct este locală, depinzând doar de valorile ei într-o vecinătate a punctului, iar proprietatea de continuitate uniformă a unei funcții pe o mulțime este globală, depinzând de valorile ei pe întreaga mulțime.

Operațiile de adunare, scădere, înmulțire cu scalari efectuate cu funcții continue uniform pe o mulțime conduc tot la astfel de funcții. De asemenea, compunerea a două funcții continue uniform este tot o astfel de funcție. Justificarea acestor afirmații este imediată.

Funcția $g_2(x) = x^2$ de mai sus arată că produsul a două funcții continue uniform nu este în mod obligatoriu tot o astfel de funcție.

De altfel, exemple simple arată că operațiile de înmulțire, împărțire sau ridicare la putere efectuate cu funcții continue uniform nu conduc, în general, tot la astfel de funcții.

Se poate constata cu ușurință că produsul a două funcții continue uniform și mărginite este tot o funcție continuă uniform. Dacă una din funcții nu este mărginită, funcția produs s-ar putea să nu fie continuă uniform, după cum se poate vedea din următorul

Exemplu. Funcția $f(x) = x \sin x$ nu este continuă uniform pe \mathbb{R} . Într-adevăr aceasta rezultă din identitatea $f(2n\pi + h) - f(2n\pi - h) = 4n\pi \sinh$ și raționând prin reducere la absurd.

Tot funcția $g_2(x) = x^2$ de mai sus arată că funcțiile continue pe o mulțime nu sunt în mod obligatoriu și continue uniform pe mulțimea respectivă. Sunt cunoscute câteva rezultate simple în legătură cu continuitatea uniformă a unei funcții continue pe o mulțime:

1°. Teorema lui Cantor: Orice funcție $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe mulțimea compactă D , este continuă uniform pe D (vezi Teorema 4.2.10).

2°. Orice funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continuă și periodică, este continuă uniform pe \mathbb{R} .

3°. Orice funcție $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, continuă și care are limitele finite $\lim_{x \searrow \alpha} f(x)$, $\lim_{x \nearrow \beta} f(x)$, este continuă uniform pe (α, β) . Aici, α, β pot fi finite sau infinite.

4°. Orice funcție $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, lipschitziană, este continuă uniform pe intervalul I . În particular, dacă f este derivabilă pe I cu excepția eventuală a unui număr finit de puncte și derivata f' este mărginită, atunci f este continuă uniform pe I .

Să justificăm aceste afirmații.

1°. Demonstrația Teoremei se află în §4.2/4.2.6.

2°. Ideea de demonstrație este următoarea: fie $T > 0$ perioada principală a funcției. Pe intervalul $[0, 2T]$, funcția f este continuă uniform, conform teoremei lui Cantor. Pentru $\varepsilon > 0$ dat, fie $\delta(\varepsilon) < T$ din definiția continuității uniforme. Se arată că acest $\delta(\varepsilon)$ este cel căutat pentru probarea continuității uniforme a funcției f pe \mathbb{R} .

3°. Considerăm mai întâi cazul particular în care α și β sunt finite. Fie F prelungirea prin continuitate a funcției f la intervalul $[\alpha, \beta]$. Teorema lui Cantor ne asigură că F este continuă uniform pe $[\alpha, \beta]$. Acum este clar că f este continuă uniform pe (α, β) .

În cazul general pentru α și β , având în vedere definiția $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcții într-un punct (Definiția 4.1.4), Criteriul lui Cauchy-Bolzano (Teorema 4.1.3) și Teorema lui Cantor, se demonstrează continuitatea uniformă a lui f pe (α, β) .

4°. Pentru prima parte, vezi Propoziția 4.2.2. În cazul particular considerat, cu Teorema lui Lagrange se arată că f este lipschitziană pe intervalul I .

Se poate demonstra cu ușurință că orice funcție continuă uniform pe un interval I transformă o submulțime mărginită a lui I tot într-o mulțime mărginită.

Alte amănunte în legătură cu funcțiile continue uniform se pot găsi în §4.2/4.2.4 – 4.2.6.

Problema 7

Să se arate că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x + 1$, este mărginită pe fiecare interval compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dar nu este mărginită pe nici un interval necompact de forma $(-\infty, b]$ sau $[a, +\infty)$.

Rezolvare. Avem în vedere definiția unei funcții mărginite dată în Definiția 1.3.4. De asemenea, avem în vedere Propoziția 1.3.4.

Pentru fiecare x din intervalul compact $[a, b]$ avem $|x| \leq \max\{|a|, |b|\} = r$ și ca urmare,

$$|f(x)| = |x^3 - 2x + 1| \leq |x|^3 + 2|x| + 1 \leq r^3 + 2r + 1$$

ceea ce arată că funcția f este mărginită pe $[a, b]$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru $x \geq \max\{a, n\}$ avem

$$f(x) = x^3 - 2x + 1 = x(x^2 - 2) + 1 \geq n + 1,$$

ceea ce arată că funcția f nu este mărginită superior pe intervalul $[a, +\infty)$. Ca urmare, funcția f nu este mărginită pe intervalul $[a, +\infty)$.

Pe de altă parte, funcția f este minorată (sau mărginită inferior) pe $[a, +\infty)$. Într-adevăr, deosebim două cazuri:

i). Cazul $a < 2$. Pe intervalul $[a, 2]$ funcția f este mărginită, deci minorată, conform teoremei lui Weierstrass (vezi Corolarul 4.2.4). Pe intervalul $[2, \infty)$, f este minorată, pentru că avem $1 \leq f(x)$ pentru $x \geq 2$. Așadar, funcția f este minorată pe intervalul $[a, \infty)$.

ii). Cazul $a \geq 2$. Ca și mai sus, f este minorată pe $[a, \infty)$ pentru că avem $1 \leq f(x)$ pentru $x \geq a$.

Concluzia este că pe intervalul $[a, \infty)$, funcția f este minorată dar nu este majorată.

În mod asemănător se arată că pe intervalul $(-\infty, b]$ funcția f nu este minorată dar este majorată. ■

Observație. Exemple simple arată că, în general, o funcție continuă $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu este mărginită pe intervalul I . În cazul în care intervalul I este un interval compact, $I = [a, b]$, are loc binecunoscuta teoremă fundamentală a lui Weierstrass privind mărginirea funcțiilor: Orice funcție continuă pe un interval compact este mărginită și își atinge marginile. Așadar, există cel puțin două puncte x_1 și x_2 în intervalul compact $[a, b]$ astfel încât

$$f(x_1) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2), \forall x \in [a, b]$$

Punctele x_1 și x_2 sunt puncte de minim absolut pentru funcția f : x_1 este punct de minim absolut pentru f iar x_2 este punct de maxim absolut pentru f .

Reamintim că, în general, numerele

$$m = \inf_{x \in I} f(x) = \inf f(I), M = \sup_{x \in I} f(x) = \sup f(I)$$

se numesc marginile funcției f pe mulțimea I .

Diverse proprietăți ale marginilor unei funcții se pot găsi în Propoziția 1.3.5.

Sunt cunoscute câteva rezultate simple în legătură cu mărginirea unei funcții continue pe o mulțime:

1°. Fie $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, continuă și astfel încât $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ este finită.

Atunci, f este mărginită și își atinge cel puțin una din margini. Aici, b poate fi finit sau $+\infty$.

Similar, dacă $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și astfel încât $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ este finită, atunci avem aceeași concluzie. Aici, a poate fi finit sau $-\infty$.

De asemenea, dacă $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă și astfel încât $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci avem aceeași concluzie. Aici, a și b pot fi finite sau nu. Facem precizarea că dacă limitele nu sunt egale, dar sunt finite, atunci funcția este doar mărginită.

Exemplu. Fiecare din funcțiile

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= \frac{x}{x+1}, \\ g : (-\infty, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= 2^x, \\ h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & h(x) &= \operatorname{arctg} |x|, \end{aligned}$$

ilustrează cele de mai sus.

Pe de altă parte, funcția $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \operatorname{arctg} x$, este continuă, are limite finite la capetele lui \mathbb{R} dar nu își atinge marginile. Aceasta arată că cerința ca limitele să fie egale este esențială. Se constată că funcția este mărginită pe \mathbb{R} .

Justificarea acestor afirmații este imediată, dacă se are în vedere Definiția 4.1.4 a limitei unei funcții într-un punct și Teorema lui Weierstrass de mai sus.

2°. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continuă și periodică. Atunci, f este mărginită și își atinge marginile.

Justificarea este imediată. Facem precizarea că funcția își atinge marginile de o infinitate de ori, cel puțin câte o dată în fiecare interval $[nT, (n+1)T]$, $n \in \mathbb{Z}$, unde $T > 0$ este o perioadă a funcției.

3°. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, lipschitziană. Atunci, f transformă orice submulțime mărginită a lui D tot într-o mulțime mărginită.

În particular, dacă f este derivabilă pe un interval I cu excepția eventuală a unui număr finit de puncte și derivata f' este mărginită, atunci f este mărginită pe fiecare subinterval mărginit al lui I .

Justificarea este imediată.

4°. Fie $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție monotonă, nu neapărat continuă. Atunci, g este mărginită și își atinge marginile. Mai precis, dacă g este crescătoare, marginile ei sunt $m = g(a)$ și $M = g(b)$ iar dacă este descrescătoare, marginile ei sunt $m = g(b)$ și $M = g(a)$. Așadar, marginile unei funcții monotone se ating în capetele intervalului.

Dacă g este monotonă pe intervalul deschis (a, b) , atunci ea este mărginită - fără să-și atingă marginile - dacă și numai dacă este mărginită pe câte o vecinătate a capetelor intervalului.

Justificările sunt imediate.

Problema 8

1. Să se stabilească semnul funcției

$$f(x) = 1 + \sin^2 x - \cos^2 x + \sin 2x$$

pe domeniul său maxim de definiție.

2. Să se stabilească numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$x^4 + 3x^2 + 2px - 1 = 0, p \in \mathbb{R} \text{ fiind dat.}$$

Rezolvare. 1). Domeniul maxim de definiție al funcției f este \mathbb{R} . Funcția f este continuă pe \mathbb{R} , fiind o sumă de astfel de funcții. Pentru $x \in \mathbb{R}$ avem $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + (\sin x + \cos x)^2 = 2\sin x(\sin x + \cos x)$. Deoarece funcția f este 2π -periodică, este suficient să stabilim semnul său pe intervalul $[0, 2\pi]$. Funcția f se anulează pe acest interval în punctele x date de ecuațiile $\sin x + \cos x = 0$, $\sin x = 0$. Aceste puncte sunt $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ respectiv 0 , π , 2π . Având în vedere faptul că o funcție continuă are semn constant pe orice interval pe care nu se anulează, rezultă următorul tablou de semne:

$\backslash x$		0	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$2 \sin x$		0	$+$	$+$	0	$-$
$\sin x + \cos x$		$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$		0	$+$	0	$-$	$+$

Explicăm cum s-a stabilit în tablou semnul factorului $h(x) = \sin x + \cos x$. Am stabilit că zerourile lui h din intervalul $[0, 2\pi]$ sunt $\frac{3\pi}{4}$ și $\frac{7\pi}{4}$. Funcția h este continuă pe $[0, 2\pi]$. Ca urmare, pe fiecare din intervalele $[0, \frac{3\pi}{4})$, $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$, $(\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$, h are semn constant. Este clar, $h(\frac{\pi}{2}) = +1$ dă semnul pe primul interval, $h(\pi) = -1$ dă semnul pe al doilea interval iar $h(2\pi) = +1$ dă semnul pe al treilea interval. Cele trei semne se trec în tablou, în locurile convenite.

2). Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2px - 1$. Avem $f(0) < 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$; există deci puncte x_1 suficient de mari astfel încât $f(x_1) > 0$. Conform Teoremei de intersecție a lui Cauchy, există cel puțin un $c_1 \in (0, x_1)$ astfel încât $f(c_1) = 0$. Analog, din $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, există cel puțin un $c_2 < 0$ astfel încât $f(c_2) = 0$. În concluzie, ecuația dată are cel puțin două rădăcini reale. Fiind ecuație cu coeficienți reali de grad par, ea poate avea numai un număr par de

rădăcini reale. Presupunem că ecuația $f(x) = 0$ are patru rădăcini reale. Conform teoremei lui Rolle, ecuația $f'(x) = 0$ are cel puțin trei rădăcini reale. Analog, ecuația $f''(x) = 0$ are cel două rădăcini reale. Dar $f''(x) = 12x^2 + 6$ și acest polinom nu are rădăcini reale. Contradicția arată că presupunerea făcută este falsă. În concluzie, ecuația dată are exact două rădăcini reale.

Altfel, folosim Metoda grafică. Ecuația se poate scrie sub forma $x^4 + 3x^2 = 1 - 2px$. Reprezentând grafic funcțiile $u(x) = x^4 + 3x^2$ și $v(x) = 1 - 2px$ în același sistem de coordonate xOy , se poate trage concluzia că ecuația dată are exact două rădăcini reale. ■

Observație. În rezolvarea primei părți a problemei s-a folosit următorul rezultat:

O funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe intervalul I și care nu se anulează în nici un punct al intervalului, are semn constant pe intervalul I .

Demonstrația se bazează pe următoarea Lemă, utilă în rezolvarea diferitelor probleme dar și în demonstrarea altor rezultate teoretice. Ea mai poartă și denumirea de Teorema de intersecție a lui Cauchy: "Dacă $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$."

Demonstrația Lemei: Presupunem $f(a) < 0$, cazul contrar tratându-se în mod asemănător. Fie mulțimea $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\}$ care, evident, este nevidă și mărginită. Conform cu Axioma lui Cantor-Dedekind (vezi Definiția 1.3.2), există $\xi = \sup A$. Din Definiția 1.2.6 rezultă că $\xi \in [a,b]$. Vom arăta că ξ poate fi luat drept c din enunțul Lemei. În primul rând, din $f(a) < 0$ și din continuitatea lui f în punctul a , există o vecinătate U a lui a astfel încât $f(x) < 0$ pentru $x \in U \cap [a,b]$. În al doilea rând, din $f(b) > 0$ rezultă la fel că există o vecinătate V a lui b astfel încât $f(x) > 0$ pentru $x \in V \cap [a,b]$. De aici, tragem concluzia că punctul ξ aparține intervalului deschis (a,b) . Acum, avem două posibilități: $\xi \in A$ sau $\xi \notin A$. Dacă $\xi \in A$, atunci $f(\xi) \leq 0$. Presupunem că $f(\xi) < 0$. Din continuitatea lui f în punctul ξ , există o vecinătate $W = (\xi - r, \xi + r)$ a lui ξ astfel încât $f(x) < 0$ pentru orice $x \in W \cap [a,b]$. Deci, există puncte $x > \xi$ din A astfel încât $f(x) < 0$, ceea ce contrazice definiția lui ξ . Rămâne deci $f(\xi) = 0$.

Dacă $\xi \notin A$, atunci $f(\xi) > 0$. Din Propoziția 1.3.1, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, există $x_n \in A$ astfel încât $\xi - \frac{1}{n} < x_n \leq \xi$. Principiul cleștelui ne dă $\lim x_n = \xi$. Criteriul lui Heine (Teorema 4.2.1) ne dă $\lim f(x_n) = f(\xi)$. Din $x_n \in A$, rezultă $f(x_n) \leq 0$ și ca urmare, $f(\xi) \leq 0$, ceea ce contrazice faptul că $f(\xi) > 0$. Așadar, $\xi \notin A$ nu poate avea loc.

Așadar, avem $f(\xi) = 0$ și luând $c = \xi$, demonstrația Lemei este încheiată.

Demonstrația rezultatului enunțat. Prin reducere la absurd. Presupunem că funcția f nu are semn constant pe I . Atunci, există două puncte $a < b$ din I astfel încât $f(a)$ și $f(b)$ au semne contrare. Lema tocmai demonstrată ne dă un punct $c \in (a, b)$ cu $f(c) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza asupra lui f . Așadar, presupunerea făcută este falsă.

Rămâne adevărat că funcția f are semn constant pe I și demonstrația este încheiată.

În general vorbind, a stabili semnul unei funcții revine la a indica submulțimile din domeniul său de definiție pe care funcția este pozitivă, negativă sau se anulează. Practic, se procedează astfel:

p₁: se determină toate zerourile $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ ale funcției continue f din intervalul I (zero al funcției f înseamnă o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$)

p₂: se stabilește semnul lui f în fiecare din intervalele (a_1, a_2) , (a_2, a_3) , ... (prin alegerea a câte unui punct b din fiecare interval, semnul lui $f(b)$ este semnul lui f pe intervalul respectiv).

Revenim la Lemă, dând o interpretare geometrică a ei. Graficul funcției f este $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y = f(x)\}$ și poate fi văzut ca fiind curba de ecuație (explicită) $y = f(x)$ - vezi §5.9/5.9.1. În condițiile Lemei, graficul lui f intersectează axa Ox în punctul $(c, 0)$. De aici, numele de Teorema de intersecție a lui Cauchy.

În rezolvarea celei de a doua părți a problemei s-au folosit următoarele rezultate, în fapt două generalizări imediate ale Lemei:

i). Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue astfel încât $f(a) < g(a)$ și $f(b) > g(b)$. Atunci, există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = g(c)$.

Într-adevăr, se aplică Lema funcției ajutoare $h = f - g$.

ii). Dacă $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă și $f(a + 0) \cdot f(b - 0) < 0$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$. Aici, a și b pot fi finite sau nu.

Într-adevăr, din definiția limitelor laterale se deduce că există puncte $a' > a$ și $b' < b$, suficient de apropiate de a și respectiv b , astfel încât $f(a')$ și $f(b')$ au același semn cu $f(a + 0)$ și respectiv $f(b - 0)$. Aplicând Lema pe intervalul $[a', b']$, rezultă concluzia.

Facem precizarea că atât în Lemă cât și în această ultimă generalizare a sa, dacă funcția este strict monotonă, atunci punctul c este unic.

Problema 9

Se dă funcția $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$. Se cere:

a). Să se determine $a > 0$, minim posibil, astfel încât funcția f să fie injectivă;

b). Pentru $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$, fie $I = [\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty)$ și $J = f(I)$. Să se arate că $f : I \rightarrow J$ este inversabilă și că inversa sa f^{-1} este continuă pe J ;

c). Să se determine f^{-1} în cazul anterior și să se verifice faptul că este continuă pe J .

Rezolvare. a). Se știe că pentru o funcție continuă pe un interval I , injectivitatea este echivalentă cu stricta monotonie. Deoarece funcția polinomială f este continuă, trebuie să determinăm $a > 0$, minim posibil, astfel încât funcția f să fie strict monotonă. Cum $f(x) = x^2(x^2 - 3) + 2$ este strict crescătoare pentru $x \geq \sqrt{3}$, rezultă că trebuie să determinăm $a > 0$, minim posibil, astfel încât funcția f să fie strict crescătoare pe $[a, \infty)$. Avem în vedere funcția de gradul al doilea $g(t) = t^2 - 3t + 2$, care este strict crescătoare pentru $t \geq \frac{3}{2}$.

Așadar, din $x > y \geq a$ trebuie să rezulte $f(x) > f(y)$. Din

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 > y^4 - 3y^2 &\iff (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 3) > 0 \iff \\ &\iff x^2 + y^2 - 3 > 0, \end{aligned}$$

se vede că este suficient ca $y^2 \geq \frac{3}{2}$ pentru ca să se verifice condiția. Aceasta înseamnă să luăm $a^2 = \frac{3}{2}$.

Presupunem că acest $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$ nu este minim posibil pentru a se verifica condiția de mai sus. Fie atunci a cel căutat și x și y astfel încât $a \leq y < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$. Atunci,

inegalitatea $f(x) > f(y)$ ne dă $x^2 + y^2 - 3 > 0$, ceea ce este imposibil.

În concluzie, $a > 0$, minim posibil, astfel încât funcția f să fie injectivă este $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

b). Și de data aceasta folosim un rezultat fundamental privind funcțiile continue, rezultat care îl completează pe cel anterior:

“Fie f o funcție continuă pe un interval I și $J = f(I)$. Atunci, funcția $f : I \rightarrow J$ este bijectivă dacă și numai dacă este strict monotonă și în acest caz, funcția inversă $f^{-1} : J \rightarrow I$ este continuă și strict monotonă.”

Menționăm faptul că monotonia lui f^{-1} este în același sens ca monotonia lui f .

Acum rezolvarea este simplă. Funcția f este continuă și strict monotonă pe intervalul $I = [\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty)$ și ca urmare, $f : I \rightarrow J$ este bijectivă, deci inversabilă, conform Propoziției 1.2.1; în plus, inversa sa f^{-1} este continuă pe J .

c). Conform cu Remarca 1.2.4, funcția inversă f^{-1} este definită prin

$$f^{-1} : J \rightarrow I, f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Conform unui alt rezultat remarcabil privind funcțiile continue, $J = f(I)$ este un interval. Deoarece f este strict crescătoare pe $I = [\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty)$, avem că

$$J = [f(\frac{\sqrt{6}}{2}), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)) = [-\frac{1}{4}, \infty).$$

Așadar, pt. $y \in J = [-\frac{1}{4}, \infty)$, rezolvăm ecuația $f(x) = y$. Ecuația devine $x^4 - 3x^2 + 2 - y = 0$ și are rădăcinile date de $x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{4y+1}}{2}$ și sunt $x = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{4y+1}}{2}}$. Din cele patru rădăcini, convine aceea care este în intervalul I . Se constată cu ușurință că $x = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4y+1}}{2}} \in I$.

Așadar, $f^{-1} : [-\frac{1}{4}, \infty) \rightarrow [\frac{\sqrt{6}}{2}, \infty)$, $f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4y+1}}{2}}$. Este clar că f^{-1} este continuă pe $[-\frac{1}{4}, \infty)$, ca o compunere

de funcții continue: funcția polinomială de gradul întâi și funcția radical (ca funcție inversă a funcției putere x^2) - vezi Teorema 4.2.4.

Se verifică astfel rezultatul găsit mai sus. ■

Observație. Demonstrăm rezultatele fundamentale folosite în rezolvarea problemei (și altele). Primul grup de rezultate se referă la Proprietatea valorilor intermediare sau Proprietatea lui Darboux.

Intuitiv, funcțiile reale continue trec de la o valoare la alta luând toate valorile intermediare. Se va vedea că această proprietate nu este însă specifică funcțiilor continue.

Reamintim următoarea Definiție: Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Se spune că o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ are Proprietatea lui Darboux (sau Proprietatea valorilor intermediare) pe intervalul I dacă pentru orice două puncte $x_1 < x_2$ din I și oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, există cel puțin un punct $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(c) = \lambda$ sau, echivalent, dacă transformă orice subinterval al lui I într-un interval. Geometric vorbind, aceasta revine la aceea ca orice dreaptă $y = \lambda$ situată între dreptele $y = f(x_1)$ și $y = f(x_2)$, intersectează graficul lui f cel puțin într-un punct cu abscisa c cuprinsă între x_1 și x_2 .

Are loc următoarea proprietate: “Orice funcție continuă pe un interval are Proprietatea valorilor intermediare (sau Proprietatea lui Darboux) pe acel interval.”

Cu alte cuvinte, “Orice funcție continuă pe un interval transformă orice subinterval într-un interval.” (sau, mai puțin riguros, “O funcție continuă transformă un interval tot într-un interval.”).

Într-adevăr, fie deci $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul I . Fie două puncte oarecare $x_1 < x_2$ din I și fie numărul λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, altfel arbitrar. Fie funcția ajutătoare $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $\varphi(x) = f(x) - \lambda$, care este în mod evident continuă. Se constată că $\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) < 0$. Conform Teoremei de intersecție a lui Cauchy, există cel puțin un punct $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $\varphi(c) = 0$, adică $f(c) = \lambda$, ceea ce încheie demonstrația.

Subliniem faptul că nu numai funcțiile continue au Proprietatea lui Darboux. De exemplu, funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

nu este continuă pe \mathbb{R} , dar are Proprietatea lui Darboux pe \mathbb{R} .

Într-adevăr, în primul rând se vede ușor că în punctul $x = 0$ funcția f are o discontinuitate de speța a doua, iar în rest este continuă (vezi Exemplitul 4.2.7 și Teorema 4.2.4).

În al doilea rând, fie două puncte oarecare $x_1 < x_2$ din I și fie numărul λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, altfel arbitrar. Dacă $x_1 < x_2 < 0$ sau dacă $0 < x_1 < x_2$, atunci f este continuă pe $[x_1, x_2]$ și ca urmare, există cel puțin un punct $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(c) = \lambda$. Fie acum cazul contrar, adică $x_1 < x_2 = 0$ sau $0 = x_1 < x_2$ sau $x_1 < 0 < x_2$. Ne situăm în primul caz, celelalte tratându-se la fel. Fie numărul λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(0) = 0$. Ca urmare, ecuația $\sin \frac{1}{x} = \lambda$ are soluțiile $x_n = \frac{1}{(-1)^n \arcsin \lambda + n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$. Dintre acestea, soluțiile x_n cu n negativ și mare în modul se află situate în intervalul $(x_1, 0)$. Ca urmare, $f(x_n) = \lambda$.

Așadar, indiferent de situație, există cel puțin un punct $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(c) = \lambda$. Afirmația făcută este justificată.

Facem câteva precizări: Dacă I este un interval, atunci el poate avea una din formele $[a, b]$, (a, b) , $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, \infty)$, (a, ∞) , $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$. Ca urmare, $J = f(I)$ are, evident, tot una din aceste forme, dar nu neapărat aceeași ca I . Există un singur caz în care, în general vorbind, I și J au aceeași formă: cazul $I = [a, b]$. Într-adevăr, funcția continuă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită și își atinge marginile m și M , conform teoremei lui Weierstrass. Ca urmare, $J = f([a, b]) = [m, M]$. Alte mici amănunte în acest caz: dacă f este și crescătoare, atunci $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ iar dacă este și descrescătoare, atunci $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

În general, dacă f nu își atinge marginile m și M pe I , atunci $f(I) = (m, M)$, sau $[m, M)$ sau $(m, M]$, după caz.

Pe de altă parte, dacă $J = [\alpha, \beta]$ este un compact dat, exemple simple de funcții f arată că I poate fi de oricare din formele de mai sus.

Cu ajutorul celor spuse mai sus, se poate determina mulțimea valorilor unei funcții continue sau se poate stabili surjectivitatea unor funcții elementare.

De exemplu, funcția continuă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ ia toate valorile dintre -1 și $+1$. Ca urmare, $f(\mathbb{R}) = [-1, +1]$ este mulțimea valorilor funcției f . Se mai poate spune că funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, +1], f(x) = \cos x,$$

este surjectivă.

Nu trebuie uitată metoda grafică. Graficul funcției continue f ajută la determinarea imaginilor $J = f(I)$.

Alte proprietăți ale funcțiilor cu Proprietatea lui Darboux:

1°. Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval din \mathbb{R} , are Proprietatea lui Darboux și dacă în punctele $a, b \in I$, $a \neq b$, $f(a)$ și $f(b)$ au semne contrare, atunci există cel puțin un punct c cuprins între a și b în care funcția se anulează: $f(c) = 0$. Reamintim că pentru funcțiile continue, această proprietate se numește Teorema de intersecție a lui Cauchy.

2°. Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval din \mathbb{R} , are Proprietatea lui Darboux și nu se anulează în nici un punct din I , atunci ea păstrează un același semn pe întreg intervalul I .

Demonstrațiile acestor proprietăți sunt imediate.

3°. Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval din \mathbb{R} , are Proprietatea lui Darboux și dacă există una din limitele laterale într-un punct $a \in I$, atunci ea este egală cu $f(a)$.

Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că există limita $f(a - 0) = \ell < f(a)$. Fie λ cuprins între ℓ și $f(a)$. Din Definiția 4.1.1 și din Remarca 4.1.9, există $a' < a$ astfel încât, pentru $x \in (a', a)$ avem $f(x) < \lambda$. Deoarece f are Proprietatea lui Darboux, există cel puțin un punct $y \in (x, a)$ astfel încât $f(y) = \lambda$, ceea ce contrazice definiția lui a' . Analog dacă $\ell > f(a)$ sau dacă există $f(a + 0)$.

O consecință imediată a acestei proprietăți este aceea că orice funcție care are Proprietatea lui Darboux nu are nici un punct de discontinuitate de speța întâia.

Al doilea grup de rezultate se referă la Inversarea funcțiilor continue.

În acest sens, are loc următoarea proprietate: “Fie f o funcție continuă pe un interval I și fie $J = f(I)$. Funcția $f : I \rightarrow J$ este bijectivă dacă și numai dacă este strict monotonă și în acest caz, funcția inversă $f^{-1} : J \rightarrow I$ este continuă și strict monotonă (în același sens cu f).”

În demonstrație, folosim următoarele două Leme, importante și prin ele însăși (ca proprietăți ale funcțiilor monotone sau ale funcțiilor cu Proprietatea lui Darboux).

Lema 1. Orice funcție monotonă și surjectivă $f : D \rightarrow J$, $J =$ interval, este continuă pe D .

Demonstrație. Presupunem că f este crescătoare. Fie $a \in D$ un punct oarecare și fie $b = f(a)$. Folosim Definiția 4.2.1 cu vecinătăți a unei

funcții continue într-un punct. Deosebim două cazuri: b este interior lui J sau coincide cu unul din capetele lui J .

i). b este interior lui J . Fie $V \in \mathcal{V}(b)$. Atunci există $\alpha < \beta$ din \mathbb{R} astfel încât $b \in (\alpha, \beta) \subset [\alpha, \beta] \subset f(D) \cap V$. Există $\alpha', \beta' \in D$ astfel încât $\alpha = f(\alpha')$ și $\beta = f(\beta')$. Deoarece f este crescătoare, rezultă că $\alpha' < a < \beta'$. Fie atunci $U = (\alpha', \beta') \in \mathcal{V}(a)$. Pentru orice $x \in U \cap D$ avem $f(x) \in [\alpha, \beta] \subset V$. Deci, f este continuă în punctul a .

ii). b este capătul din stânga a lui J . Deci, $b \leq f(x)$ pentru $x \in D$. Fie $V \in \mathcal{V}(b)$ și $\beta \in f(D) \cap V$ astfel încât $b < \beta$. Atunci există $\beta' \in D$ astfel încât $\beta = f(\beta')$ și $a < \beta'$. Fie $\alpha' \in D$ astfel încât $\alpha' < a$ și fie $U = (\alpha', \beta') \in \mathcal{V}(a)$. Atunci, pentru orice $x \in U \cap D$ avem $f(x) \in (f(\alpha'), f(\beta')) = [b, \beta) \subset V$. Așadar, f este continuă în punctul a .

Dacă b este capătul din dreapta a lui J , demonstrația se face analog.

Dacă f este descrescătoare, se procedează asemănător.

Lema 2. Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval din \mathbb{R} , are Proprietatea lui Darboux și este injectivă, atunci f este strict monotonă.

Demonstrație. Prin reducere la absurd. Presupunem că f nu este nici strict crescătoare, nici strict descrescătoare pe I . Aceasta înseamnă că există trei puncte $x < y < z$ din I astfel încât $f(x) > f(y)$ și $f(y) < f(z)$ sau $f(x) < f(y)$ și $f(y) > f(z)$. Ne situăm în primul caz, celălalt tratându-se asemănător. Fie un număr λ cuprins între $\min\{f(x), f(z)\}$ și $f(y)$. Deoarece f are Proprietatea lui Darboux, există c_1 cuprins între x și y astfel încât $f(c_1) = \lambda$ și există c_2 cuprins între y și z astfel încât $f(c_2) = \lambda$. Avem deci $f(c_1) = f(c_2)$ și cum f este injectivă, rezultă $c_1 = c_2$, ceea ce este imposibil. Contradicția arată că f este strict monotonă.

Trecem la demonstrația proprietății de mai sus.

Necesitatea. Așadar, avem o funcție continuă și bijectivă $f : I \rightarrow J$. Trebuie să demonstrăm că f este strict monotonă și că funcția inversă $f^{-1} : J \rightarrow I$ este continuă și strict monotonă (în același sens cu f).

Deoarece f este continuă, ea are Proprietatea lui Darboux. Fiind și injectivă, Lema 2 ne dă că f este strict monotonă. Mai departe, facem precizarea că funcția inversă f^{-1} există conform Propoziției 1.2.1. Ne situăm în cazul că f este strict crescătoare, cazul f strict descrescătoare tratându-se asemănător. Fie u și v oarecare din J , astfel încât $u < v$. Fie încă $f^{-1}(u) = x$ și $f^{-1}(v) = y$. Din bijectivitatea lui f^{-1} rezultă că $x \neq y$. Dacă am avea $x > y$, ar rezulta $f(x) > f(y)$, adică $u > v$, ceea ce nu se poate. Rămâne deci că avem $x < y$, adică $f^{-1}(u) < f^{-1}(v)$. Așadar, f^{-1} este strict crescătoare. În sfârșit, deoarece funcția

$f^{-1} : J \rightarrow I$ este strict monotonă și surjectivă, avem, conform Lemei 1, că ea este continuă.

Suficiența. Așadar, avem o funcție continuă și strict monotonă $f : I \rightarrow J = f(I)$. Trebuie să demonstrăm că f este bijectivă și că funcția inversă $f^{-1} : J \rightarrow I$ este continuă și strict monotonă (în același sens cu f). Din faptul că f este strict monotonă rezultă că f este injectivă. Surjectivitatea lui f este evidentă. Ultima parte rezultă din cele spuse mai sus.

Proprietatea tocmai demonstrată ne asigură că funcțiile inverse ale funcțiilor uzuale sunt continue. Astfel,

1°. Funcția putere $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^{2n}$, ($n \in \mathbb{N}$), este continuă, strict crescătoare și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, numită funcția radical (de indice par), $\sqrt[2n]{\cdot} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \rightarrow \sqrt[2n]{x}$, este continuă și strict crescătoare.

Facem precizarea că pentru n impar, funcția putere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n+1}$ este continuă, strict crescătoare și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, numită funcția radical (de indice impar), $\sqrt[2n+1]{\cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \sqrt[2n+1]{x}$, este continuă și strict crescătoare.

2°. Funcția exponențială $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$), este continuă, strict monotonă și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, numită funcția logaritmică, $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \log_a x$, este continuă și strict monotonă.

3°. Funcția sinus, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, +1]$, $x \rightarrow \sin x$, este continuă, strict crescătoare și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, numită funcția arcsinus, $\arcsin : [-1, +1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x \rightarrow \arcsin x$, este continuă și strict crescătoare.

4°. Funcția cosinus, $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$, $x \rightarrow \cos x$, este continuă, strict descrescătoare și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, numită funcția arccosinus, $\arccos : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$, $x \rightarrow \arccos x$, este continuă și strict descrescătoare.

5°. Funcția tangentă, $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, este continuă, strict crescătoare și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, numită funcția arctangentă, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \rightarrow \operatorname{arctg} x$, este continuă și strict crescătoare.

6°. Funcția cotangentă, $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, este continuă, strict descrescătoare și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, numită funcția arcotangentă, $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $x \rightarrow \operatorname{arcctg} x$, este continuă și strict descrescătoare.

7°. Funcția sinus hiperbolic, $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, este continuă, strict crescătoare și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, arcsinus hiperbolic, $\text{arsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, este continuă și strict crescătoare.

8°. Funcția cosinus hiperbolic, $\text{ch} : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $\text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, este continuă, strict crescătoare și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, arccosinus hiperbolic, $\text{arch} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\text{arch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, este continuă și strict crescătoare.

9°. Funcția tangentă hiperbolică, $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow (-1, +1)$, $\text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, este continuă, strict crescătoare și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, arctangentă hiperbolică, $\text{arth} : (-1, +1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{arth}x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, este continuă și strict crescătoare.

10°. Funcția cotangentă hiperbolică, $\text{cth} : (0, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$, $\text{cth}x = \frac{\text{ch}x}{\text{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, este continuă, strict descrescătoare și surjectivă. Ca urmare, funcția inversă a sa, arccotangentă hiperbolică, $\text{arcth} : (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $\text{arcth}x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, este continuă și strict descrescătoare.

Facem câteva precizări:

– în general, graficul unei funcții și graficul funcției inverse, reprezentate în același sistem de axe, sunt simetrice față de prima bisectoare $y = x$.

– funcțiile hiperbolice ch și cth se mai pot inversa și pe alte intervale din domeniile lor maxime de definiție: ch pe intervalul $(-\infty, 0]$ iar cth pe $(-\infty, 0)$.

– denumirile de sinus hiperbolic și cosinus hiperbolic vin de la faptul că o reprezentare parametrică a unei porțiuni a hiperbolei echilaterare $x^2 - y^2 = 1$ este $x = \text{cht}$, $y = \text{sht}$, $t \in [0, +\infty)$. Pentru a nu se crea confuzii, funcțiile sinus și cosinus obișnuite se numesc sinus și cosinus circulare (pentru că o reprezentare parametrică a cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 1$ este $x = \text{cost}$, $y = \text{sint}$, $t \in [0, 2\pi]$).

– funcțiile hiperbolice satisfac o serie de formule, asemănătoare cu cele din trigonometria circulară:

- i). $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$;
- ii). $\text{ch}(x + y) = \text{ch}x \cdot \text{ch}y + \text{sh}x \cdot \text{sh}y$;
- iii). $\text{sh}(x + y) = \text{sh}x \cdot \text{ch}y + \text{ch}x \cdot \text{sh}y$;
- iv). $\text{th}(x + y) = \frac{\text{th}x + \text{th}y}{1 + \text{th}x \cdot \text{th}y}$;
- v). etc.

În legătură cu funcțiile monotone, mai amintim următoarele:

1°. Toate punctele de discontinuitate ale unei funcții monotone pe un interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, sunt de speța întâia.

Demonstrația rezultă imediat cu ajutorul Teoremei 4.1.10.

2°. Mulțimea punctelor de discontinuitate ale unei funcții monotone pe un interval, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, este cel mult numărabilă.

Demonstrație. Presupunem pentru început că intervalul I este compact, $I = [a, b]$ și că funcția f este crescătoare. Fie $\sigma > 0$ și fie n puncte $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ din intervalul deschis (a, b) în care saltul funcției este cel puțin egal cu $\sigma : f(x_i + 0) - f(x_i - 0) \geq \sigma$, $i = 1, 2, \dots, n$. Din Teorema 4.1.10, avem că $f(x_i + 0) \leq f(x_{i+1} - 0)$ și ca urmare,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &\geq f(x_n + 0) - f(x_1 - 0) = \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i + 0) - f(x_i - 0)) + \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_{i+1} - 0) - f(x_i + 0)) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^n (f(x_i + 0) - f(x_i - 0)) \geq n\sigma. \end{aligned}$$

De aici, rezultă că $n \leq \frac{f(b) - f(a)}{\sigma}$, ceea ce arată că numărul punctelor din I în care saltul funcției este cel puțin egal cu σ este finit.

Facem următoarele notații:

- S este mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției f ;
- S_1 este mulțimea punctelor din I în care saltul funcției f este cel puțin egal cu 1;
- S_n , ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) este mulțimea punctelor din I în care saltul funcției f este cuprins între $\frac{1}{n}$ și $\frac{1}{n-1}$.

Din proprietatea anterioară a funcțiilor monotone, rezultă în mod clar că $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Deoarece fiecare mulțime S_k este finită sau vidă, rezultă

că S este cel mult numărabilă (vezi Propoziția 1.4.2 și Remarca 1.4.2) și demonstrația este încheiată în acest caz.

Dacă funcția f este descrescătoare, demonstrația este asemănătoare.

Dacă intervalul I nu este compact, atunci el se poate scrie ca o reuniune numărabilă de intervale compacte ce au în comun, două câte

doi, câte o extremitate $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$. În fiecare interval $[a_k, b_k]$,

funcția f are cel mult o mulțime numărabilă de puncte de discontinuitate. Cum o mulțime numărabilă de mulțimi cel mult numărabile

este o mulțime cel mult numărabilă, rezultă că mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției f este o mulțime cel mult numărabilă. Demonstrația este acum completă.

Facem precizarea că această proprietate este un caz particular al Teoremei lui Al. Froda: "Punctele de discontinuitate de speța întâia ale unei funcții $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ formează o mulțime cel mult numărabilă."

3°. Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval din \mathbb{R} , este monotonă și are Proprietatea lui Darboux, atunci ea este continuă. Cu alte cuvinte, în clasa funcțiilor monotone, Proprietatea lui Darboux este echivalentă cu continuitatea.

Într-adevăr, o astfel de funcție nu poate avea discontinuități nici de speța întâia (având Proprietatea lui Darboux), nici de speța a doua (fiind monotonă).

CAPITOLUL 2

Funcții Derivabile

Problema 10

Să se calculeze derivatele funcțiilor:

a). $f(x) = \ln(x^2 + 4) + \log_2(x^2 + 2x + 2) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;

b). $g(x) = x\sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$;

c). $h(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$;

d). $k(x) = x^{\ln x}$.

Rezolvare. a). Aplicăm regula de derivare a sumei a trei funcții și, în același timp, ținem cont de formulele:

$$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}, \log_2 u(x) = \frac{\ln u(x)}{\ln 2},$$

$$(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{u'(x)}{1 + u^2(x)}.$$

Ca urmare, deoarece avem $(\ln(x^2 + 4))' = \frac{2x}{x^2 + 4}$ și apoi

$$(\log_2(x^2 + 2x + 2))' = \frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x + 2) \ln 2}, \quad (\operatorname{arctg} \frac{x}{2})' = \frac{2}{x^2 + 4},$$

derivata funcției f este, pentru $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4} + \frac{2(x+1)}{(x^2 + 2x + 2) \ln 2} + \frac{2}{x^2 + 4}.$$

b). Aplicăm regula de derivare a diferenței și a produsului a două funcții și, în același timp, ținem cont de formulele:

$$(\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ și } (\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ca urmare,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x\sqrt{x^2 + 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))' = \\ &= \sqrt{x^2 + 1} + x \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

c). Aplicăm regula de derivare a câtului a două funcții și avem

$$h'(x) = \frac{(2x - 3)(x^2 + 1) - (x^2 - 3x + 2)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 1)^2}.$$

d). Aplicăm regula de derivare a unei puteri

$$k'(x) = (x^{\ln x})' = x^{\ln x} \left(\frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} \ln x \right) = 2x^{\ln x - 1} \ln x. \blacksquare$$

Observații. 1. În legătură cu funcțiile derivabile, reamintim următoarele:

Definiția derivatei unei funcții într-un punct.

Se spune că funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are derivată în punctul $a \in D \cap D'$ dacă există $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, finită sau infinită, notată $f'(a)$ sau $\frac{df(a)}{dx}$.

Când derivata $f'(a)$ este finită, se spune că funcția f este derivabilă în punctul a .

Limitele laterale corespunzătoare (când au sens),

$$f'_s(a) = \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ și } f'_d(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

se numesc derivata la stânga respectiv la dreapta a funcției f în punctul a .

Când aceste derivate laterale sunt finite, se spune că funcția f este derivabilă la stânga respectiv la dreapta în punctul a .

Este clar că într-un punct de acumulare bilateral $a \in D$, funcția f este derivabilă dacă și numai dacă ea este derivabilă la stânga și la dreapta și derivatele laterale sunt egale. În acest caz, derivata funcției este $f'(a) = f'_s(a) = f'_d(a)$.

Dacă o funcție $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în fiecare punct al unei submulțimi $E \subset D$, atunci se spune că f este derivabilă pe mulțimea E . În acest caz, funcția

$$f' : E \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f'(x)$$

se numește derivata lui f pe mulțimea E .

Operația prin care se obține derivata unei funcții se numește operația de derivare.

În mod similar, se pot defini funcțiile derivate laterale f'_s și f'_d prin

$$x \rightarrow f'_s(x) \text{ respectiv } x \rightarrow f'_d(x),$$

fiecare dintre ele fiind definită în acele puncte ale lui D în care funcția f are derivata laterală respectivă finită.

De exemplu, pentru funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & \text{dacă } x \leq 1 \\ 3x - 2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

avem

$$f'_s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f'_s(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{-x}}, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{dacă } 0 < x \leq 1 \\ 3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases},$$

$$f'_d : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f'_d(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{-x}}, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ 3, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}.$$

În general, $E = \{x \in D \mid f'_s(x) = f'_d(x), \text{ finite}\}$ și atunci $f'(x) = f'_s(x) = f'_d(x), x \in E$.

De exemplu,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{x}}, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ 3, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

este derivata funcției f .

Un prim rezultat fundamental este următorul:

“Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct”.

Într-adevăr, rezultă din egalitatea, adevărată pentru $x \neq a$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a),$$

prin trecere la limită:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right] = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Facem precizarea că acest rezultat rămâne valabil în cazul mai general în care funcția este derivabilă la stânga și la dreapta într-un punct. Interpretarea geometrică a derivatei.

Pentru o funcție continuă $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă într-un punct $a \in I$, numărul $f'(a)$ este coeficientul unghiular al (sau panta) tangentei la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$. Ecuația tangentei la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$ este $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Dacă f are doar derivată în punctul a , adică $f'(a) = -\infty$ sau $f'(a) = \infty$, atunci tangenta la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Oy și are ecuația $x = a$.

Similar, pentru o funcție derivabilă la dreapta într-un punct $a \in I$, numărul $f'_d(a)$ este coeficientul unghiular al (sau panta) semitangentei la dreapta la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$. Ecuația semitangentei la dreapta la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$ este

$$y - f(a) = f'_d(a)(x - a), \quad x \geq a.$$

Dacă f are doar derivată la dreapta în punctul a (adică $f'_d(a) = -\infty$ sau $f'_d(a) = +\infty$), atunci semitangenta la dreapta la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Oy (și are ecuația $x = a$, $y \leq f(a)$ respectiv $x = a$, $y \geq f(a)$).

Similar, pentru o funcție derivabilă la stânga într-un punct $a \in I$, numărul $f'_s(a)$ este coeficientul unghiular al (sau panta) semitangentei la stânga la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$. Ecuația semitangentei la stânga la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$ este

$$y - f(a) = f'_s(a)(x - a), \quad x \leq a.$$

Dacă f are doar derivată la stânga în punctul a (adică $f'_s(a) = -\infty$ sau $f'_s(a) = +\infty$), atunci semitangenta la stânga la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu axa Oy (și are ecuația $x = a, y \geq f(a)$ respectiv $x = a, y \leq f(a)$).

Dacă în punctul a funcția are derivate laterale diferite între ele, cel puțin una finită, punctul a se numește punct unghiular pentru funcția f iar punctul $(a, f(a))$ se numește punct unghiular pentru graficul lui f . Într-un astfel de punct, cele două semitangente, la stânga și la dreapta, formează un unghi cuprins între 0 și π radiani.

De exemplu, funcția $f(x) = |x - a|$ are în punctul a un punct unghiular, pentru că $f'_s(a) = -1, f'_d(a) = +1$.

Dacă în punctul a funcția are derivate laterale diferite între ele, ambele fiind infinite (adică dacă $f'_s(a) = -\infty$ și $f'_d(a) = +\infty$ sau $f'_s(a) = +\infty$ și $f'_d(a) = -\infty$), punctul a se numește punct de întoarcere pentru funcția f iar punctul $(a, f(a))$ se numește punct de întoarcere pentru graficul lui f . Într-un astfel de punct, cele două semitangente, la stânga și la dreapta, coincid.

De exemplu, funcția $f(x) = \sqrt{|x - a|}$ are în punctul a un punct de întoarcere, pentru că $f'_s(a) = -\infty, f'_d(a) = +\infty$.

Derivabilitatea funcțiilor elementare.

Funcțiile elementare - polinomiale, raționale, trigonometrice, unele puteri reale, exponențiale - sunt derivabile pe domeniul lor maxim de definiție; în general vorbind, domeniul maxim de definiție al unei astfel de funcții este fie un interval (care poate fi chiar \mathbb{R}) fie o reuniune finită de intervale deschise.

Urmând definiția de mai sus, se pot calcula derivatele acestor funcții. Este recomandabil reținerea acestor derivate. A se vedea un tabel cu derivate imediate dintr-un manual de liceu.

Un exemplu simplu. Pentru funcția putere naturală $f(x) = x^n$, într-un punct oarecare $a \in \mathbb{R}$ avem

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1}) = na^{n-1}. \end{aligned}$$

În punctul curent această egalitate se scrie $f'(x) = nx^{n-1}$ și ca urmare, are loc formula de derivare

$$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

O funcție neelementară apartine este funcția modul,

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow |x - a|$$

a cărei explicitare este

$$|x - a| = \begin{cases} a - x, & \text{dacă } x < a \\ x - a, & \text{dacă } x \geq a \end{cases}.$$

Urmând definiția de mai sus, se constată că funcția modul este derivabilă în fiecare punct $x \neq a$ și

$$|\cdot|'(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < a \\ +1, & \text{dacă } x > a \end{cases}.$$

În punctul a , derivata la stânga este -1 iar derivata la dreapta, $+1$. Ca urmare, punctul a este punct unghiular pentru funcția modul.

2. În legătură cu regulile de derivare, reamintim următoarele:

i). suma (diferența) a două funcții derivabile $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe E și derivata sumei (diferenței) este egală cu suma (diferența) derivatelor; regula de derivare se scrie:

$$(f + g)' = f' + g', (f - g)' = f' - g';$$

ii). produsul cu un scalar a unei funcții derivabile $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe E și are loc regula de derivare

$$(\lambda f)' = \lambda f';$$

iii). produsul a două funcții derivabile $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe E și are loc regula de derivare

$$(fg)' = f'g + fg';$$

iv). câtul a două funcții derivabile $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care numitorul g nu se anulează este o funcție derivabilă pe E și are loc regula de derivare

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2};$$

v). puterea a două funcții derivabile $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care baza f este pozitivă ($f > 0$) este o funcție derivabilă pe E și are loc regula de derivare

$$(f^g)' = f^g \left(g' \ln f + g \frac{f'}{f} \right).$$

3. În legătură cu derivabilitatea funcției compuse reamintim următoarea

Teoremă. Fie I și J intervale și funcțiile $u : I \rightarrow J, f : J \rightarrow \mathbb{R}$.

Dacă u este derivabilă în punctul $a \in I$ și f este derivabilă în punctul $u(a)$, atunci funcția compusă $F = f \circ u$ este derivabilă în punctul a și $F'(a) = f'(u(a)) \cdot u'(a)$.

Dacă u este derivabilă pe I și f este derivabilă pe J , atunci funcția compusă $F = f \circ u$ este derivabilă pe I și are loc regula de derivare a funcției compuse

$$(f \circ u)' = (f' \circ u) \cdot u'.$$

Practic, aceasta se scrie $F'(x) = f'(u(x)) \cdot u'(x), \forall x \in I$.

Exemple. 1°. Derivata funcției $G(x) = \cos^3 x$ se calculează ușor observând că are loc compunerea de funcții

$$G(x) = \cos^3 x = (\cos x)^3 = f(u(x)), \text{ unde } u(x) = \cos x \text{ și } f(u) = u^3.$$

Deoarece $u'(x) = -\sin x$ și $f'(u) = 3u^2$, avem

$$G'(x) = 3\cos^2 x (-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x.$$

2°. Derivata funcției $H(x) = \arctg \sqrt{x^2 + 1}$ se calculează ușor observând că are loc compunerea de funcții

$$H(x) = f(g(u(x))), \text{ unde } f(t) = \arctg t, g(u) = \sqrt{u} \text{ și } u(x) = x^2 + 1.$$

Deoarece $u'(x) = 2x$, $g'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ și $f'(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$, avem, prin aplicarea repetată a formulei de mai sus,

$$H'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})^2 + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Se observă de aici regula de derivare a unei compuneri de trei funcții:

$$(f \circ g \circ u)' = (f' \circ g \circ u) \cdot (g' \circ u) \cdot u'.$$

În mod asemănător se poate stabili regula de derivare a unei compuneri de oricât de multe funcții.

În legătură cu derivata funcției inverse, reamintim următoarea

Teoremă. Fie I și J intervale și funcția $f: I \rightarrow J$, continuă și bijectivă. Dacă f are derivată într-un punct $a \in I$, atunci funcția inversă f^{-1} are derivată în punctul corespunzător $b = f(a)$. În plus,

$$(f^{-1})'(b) = \begin{cases} \frac{1}{f'(a)}, & \text{dacă } f'(a) \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } f'(a) = \pm \infty \\ +\infty & \text{dacă } f'(a) = 0, f \text{ crescătoare} \\ -\infty & \text{dacă } f'(a) = 0, f \text{ descrescătoare} \end{cases}.$$

În particular, dacă f este derivabilă pe I și $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$, atunci funcția inversă f^{-1} este derivabilă pe J și are loc regula de derivare a funcției inverse

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \text{ sau } (f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}.$$

Practic, acestea se scriu sub oricare din formele

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ unde } y = f(x), x \in I,$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ unde } x \in I,$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \text{ unde } y \in J.$$

Proprietatea tocmai prezentată ne asigură că funcțiile inverse ale funcțiilor uzuale sunt derivabile pe unume intervale. Astfel,

1°. Funcția putere $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^n$, ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), este derivabilă, strict crescătoare și surjectivă. În plus, $f'(a) = na^{n-1} \neq 0$ pentru $a > 0$. Ca urmare, funcția inversă a sa, numită funcția radical, $\sqrt[n]{\cdot}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$, este derivabilă în punctul $b = a^n$ și $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{na^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{b^{n-1}}}$.

Schimbând notația, pentru orice $x > 0$ avem formula $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Din cele spuse mai sus, funcția radical $\sqrt[n]{\cdot}$ nu este derivabilă în punctul 0 și avem $f'_d(0) = +\infty$. Pentru funcția radical de indice impar, în punctul 0 avem $f'(0) = +\infty$.

2°. Funcția exponențială $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$), este derivabilă, strict monotonă și surjectivă. În plus, $f'(x) = a^x \ln a \neq 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$. Ca urmare, funcția inversă a sa, numită funcția logaritmică, $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow \log_a x$, este derivabilă în punctul $y = f(x) = a^x$ și $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}$.

Schimbând notația, pentru orice $x > 0$ avem formula $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. În particular, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3°. Funcția sinus, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, +1]$, $x \rightarrow \sin x$, este derivabilă, strict crescătoare și surjectivă. În plus, $\sin'x = \cos x \neq 0$ pentru $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ca urmare, funcția inversă a sa,

$$\arcsin : [-1, +1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \rightarrow \arcsin x,$$

este derivabilă în punctul $y = \sin x$ și are loc formula

$$\arcsin' y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Schimbând notația, pentru $x \in (-1, 1)$ avem $\arcsin'x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

În punctele ± 1 , funcția arcsin nu este derivabilă dar are derivate laterale infinite: $\arcsin'_d(-1) = +\infty$, $\arcsin'_s(1) = +\infty$.

4°. Funcția cosinus, $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$, $x \rightarrow \cos x$, este derivabilă, strict descrescătoare și surjectivă. În plus, $\cos'x = -\sin x \neq 0$ pentru $x \in (0, \pi)$. Ca urmare, funcția inversă a sa,

$$\arccos : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi], x \rightarrow \arccos x,$$

este derivabilă în punctul $y = \cos x$ și are loc formula

$$\arccos' y = \frac{1}{-\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Schimbând notația, pentru $x \in (-1, 1)$ avem $\arccos'x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

În punctele ± 1 , funcția arccos nu este derivabilă dar are derivate laterale infinite: $\arccos'_d(-1) = -\infty$, $\arccos'_s(1) = -\infty$.

5°. Funcția tangentă, $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, este derivabilă, strict crescătoare și surjectivă. În plus, $\operatorname{tg}'x = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ pentru $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ca urmare, funcția inversă a sa,

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), x \rightarrow \operatorname{arctg} x,$$

este derivabilă în punctul $y = \operatorname{tg}x$ și are loc formula

$$\operatorname{arctg}'y = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Schimbând notația, pentru $x \in \mathbb{R}$ avem $\operatorname{arctg}'x = \frac{1}{1 + x^2}$.

6°. Funcția cotangentă, $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$, este derivabilă, strict descrescătoare și surjectivă. În plus, $\operatorname{ctg}'x = -\frac{1}{\sin^2 x} \neq 0$ pentru $x \in (0, \pi)$. Ca urmare, funcția inversă a sa,

$$\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi), x \rightarrow \operatorname{arcctg}x,$$

este derivabilă în punctul $y = \operatorname{ctg}x$ și are loc formula

$$\operatorname{arcctg}'y = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\sin^2 x = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

Schimbând notația, pentru $x \in \mathbb{R}$ avem $\operatorname{arcctg}'x = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Amănunte se pot găsi în orice manual de liceu.

Problema 11

Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^x$, este indefinit derivabilă pe \mathbb{R} . Să se determine derivatele de ordin superior $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. Funcția f este un produs de două funcții derivabile: o funcție polinomială și o funcție exponențială. Ca urmare, f este derivabilă pe \mathbb{R} . Derivata sa este

$$f'(x) = (x^2 e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = e^x (x^2 + 2x).$$

Din aceleași motive, funcția f' este derivabilă pe \mathbb{R} . Ca urmare, funcția f este de două ori derivabilă pe \mathbb{R} . Derivata de ordinul doi a lui f este

$$\begin{aligned} f'' &= (f')' = (e^x (x^2 + 2x))' = \\ &= e^x (x^2 + 2x) + e^x (2x + 2) = e^x (x^2 + 4x + 2). \end{aligned}$$

Presupunem acum că f este de n ori derivabilă pe \mathbb{R} și că derivata de ordinul n este de forma

$$f^{(n)}(x) = e^x (x^2 + a_n x + b_n),$$

unde a_n și b_n sunt numere reale ce depind de n . Este clar că $a_1 = 2$ și $b_1 = 0$, $a_2 = 4$ și $b_2 = 2$. Se vede că $f^{(n)}$ este derivabilă pe \mathbb{R} și ca urmare, funcția f este de $n + 1$ ori derivabilă pe \mathbb{R} . Derivata de ordinul $n + 1$ a lui f este

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)} \right)'(x) = \left(e^x (x^2 + a_n x + b_n) \right)' = \\ &= e^x (x^2 + a_n x + b_n) + e^x (2x + a_n) = \\ &= e^x (x^2 + (a_n + 2)x + a_n + b_n), \end{aligned}$$

adică are aceeași formă ca $f^{(n)}$.

Am demonstrat prin inducție că pentru orice număr natural n , f este de n ori derivabilă pe \mathbb{R} și că derivata de ordinul n este de forma

$$f^{(n)}(x) = e^x (x^2 + a_n x + b_n).$$

Așadar, conform definiției, funcția f este indefinit derivabilă pe \mathbb{R} .

S-au obținut totodată și relațiile de recurență satisfăcute de șirurile de numere reale (a_n) și (b_n) :

$$a_{n+1} = a_n + 2, \quad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Prima relație arată că șirul de numere reale (a_n) este o progresie aritmetică cu rația $r = 2$. Cum primul termen este $a_1 = 2$, rezultă că $a_n = 2 + 2(n - 1) = 2n$.

Cu aceasta, a doua relație devine $b_{n+1} = b_n + 2n$. Facem aici $n = 1, 2, 3, \dots, n - 1$, adunăm membru cu membru relațiile obținute și obținem

$$b_n = 2(1 + 2 + \dots + n - 1) = (n - 1)n.$$

Așadar, derivata de ordinul n a lui f este

$$f^{(n)}(x) = e^x (x^2 + 2nx + (n - 1)n), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad \blacksquare$$

Observație. În legătură cu derivatele de ordin superior, reamintim următoarele:

Se spune că funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă în punctul $a \in D \cap D'$ dacă f este derivabilă pe o vecinătate V a lui a și dacă derivata $f' : V \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul a . Numărul $(f')'(a)$ se notează $f''(a)$ și se numește derivata a doua (de ordinul doi) a funcției f în punctul a .

Dacă derivata f' este derivabilă pe D , se spune că f este de două ori derivabilă pe D . În acest caz, funcția $f'' : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f'' = (f')'$, se numește derivata a doua (de ordinul doi) a lui f ; se mai notează $f^{(2)}$. Se poate continua. Se spune că funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este de n ori ($n \geq 2$) derivabilă în punctul $a \in D \cap D'$ dacă f este de $n - 1$ ori derivabilă pe o vecinătate V a lui a și dacă derivata $f^{(n-1)} : V \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul a . Numărul $(f^{(n-1)})'(a)$ se notează $f^{(n)}(a)$ și se numește derivata de ordinul n a funcției f în punctul a .

Dacă derivata $f^{(n-1)}$ este derivabilă pe D , se spune că f este de n ori derivabilă pe D . În acest caz, funcția $f^{(n)} : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, se numește derivata a n -a sau derivata de ordinul n , a funcției f .

Dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, funcția f este de n ori derivabilă în punctul a (pe mulțimea $E \subset D$), se spune că f este indefinit derivabilă în acest punct (pe această mulțime).

Uneori, se consideră drept derivată de ordinul zero a funcției chiar funcția.

Pentru $n \in \mathbb{N}$, se folosește notația: $C^n(D, \mathbb{R})$ este mulțimea funcțiilor $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt de n ori derivabile pe D și derivata $f^{(n)}$ este continuă pe D . La fel, $C(D, \mathbb{R})$ este mulțimea funcțiilor $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ care sunt continue pe D . În sfârșit, $C^\infty(D, \mathbb{R})$ este mulțimea funcțiilor $f \in C^n(D, \mathbb{R})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Este clar că au loc incluziunile

$$C(D, \mathbb{R}) \supset C^1(D, \mathbb{R}) \supset C^2(D, \mathbb{R}) \supset \dots \supset C^n(D, \mathbb{R}) \supset \dots \supset C^\infty(D, \mathbb{R})$$

Când $f \in C^n(D, \mathbb{R})$, se mai spune că f este de clasă C^n (pe D); aici, $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$.

Exemple. 1°. Funcțiile elementare - polinomiale, raționale, trigonometrice, unele puteri reale, exponențialele, logaritmi - sunt indefinit derivabile (de clasă C^∞) pe domeniul lor maxim de definiție.

2°. Unele funcții au expresii simple pentru derivatele de ordin superior:

$$i). (x^k)^{(n)} = \begin{cases} A_k^n x^{k-n}, & \text{dacă } n < k \\ k!, & \text{dacă } n = k \\ 0, & \text{dacă } n > k \end{cases}, k \in \mathbb{N} \text{ este dat; } x \in \mathbb{R}.$$

$$ii). (x^\lambda)^{(n)} = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)x^{\lambda-n}; \lambda \in \mathbb{R} \text{ este dat; } x > 0.$$

$$iii). \left(\frac{1}{x-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}; x \neq a.$$

$$iv). (e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}; \lambda \in \mathbb{R} \text{ este dat; } x \in \mathbb{R}.$$

$$v). \sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); x \in \mathbb{R}.$$

$$vi). \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right); x \in \mathbb{R}.$$

Aceste formule se pot demonstra prin inducție.

3°. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ este de

clasă C^1 pe \mathbb{R} și indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Într-adevăr, din $|f(x)| \leq |x^3 \cos \frac{1}{x}| \leq |x^3|$ pentru $x \in \mathbb{R}$ și din Teorema 4.1.7, avem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, ceea ce arată că funcția f

este continuă în punctul 0. Apoi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x} = 0$,

precum mai sus. Deci, funcția f este derivabilă în punctul 0. Cum pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$ funcția f este o compunere de funcții elementare, ea este derivabilă. Avem

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și se constată cu ușurință că $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Funcția f' este continuă în punctul 0. Cum pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$ funcția f' este o compunere de funcții elementare, ea este continuă.

În concluzie, funcția f este de clasă C^1 pe \mathbb{R} .

Apoi, deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (3x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x})$ nu există,

rezultă că funcția f nu este de două ori derivabilă în punctul 0. În sfârșit, se constată cu ușurință că funcția f este indefinit derivabilă pentru $x \neq 0$.

Operațiile cu funcții derivabile se extind și la derivatele de ordin superior. Astfel, dacă funcțiile $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt de k ori derivabile pe D , iar α, β sunt constante reale, atunci și funcțiile $\alpha f + \beta g$ și fg sunt de k ori derivabile pe D și au loc formulele de derivare de ordin superior

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)},$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i f^{(n-i)} g^{(i)},$$

pentru $n = 1, 2, \dots, k$. Ultima formulă se numește formula lui Leibniz de derivare a produsului. Ambele formule se demonstrează prin inducție fără nici o dificultate.

Dacă, în plus, g nu se anulează pe D , atunci funcția $\frac{f}{g}$ este de k ori derivabilă pe D .

Dacă, în plus, $f > 0$, atunci funcția $f^{\frac{1}{g}}$ este de k ori derivabilă pe D .

Dacă, în plus, $f \circ g$ are sens, atunci funcția $f \circ g$ este de k ori derivabilă pe D .

În aceste ultime cazuri, derivatele de ordin superior se determină din aproape în aproape.

Pentru a ilustra prima formulă, fie $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$. Scriem funcția sub forma $f(x) = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right]$ și atunci, pentru $x \neq \pm a$, avem

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2a} \left[\left(\frac{1}{x-a} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+a} \right)^{(n)} \right] = \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2a} \left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$

Pentru a ilustra formula lui Leibniz, reluăm pe scurt problema de mai sus. Avem deci

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (e^x x^2)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i (e^x)^{(n-i)} (x^2)^{(i)} = C_n^0 (e^x)^{(n)} (x^2)^{(0)} + \\ &+ C_n^1 (e^x)^{(n-1)} (x^2)^{(1)} + C_n^2 (e^x)^{(n-2)} (x^2)^{(2)} + \dots = \\ &= e^x x^2 + C_n^1 e^x 2x + C_n^2 e^x 2 + 0 = e^x (x^2 + 2nx + n(n-1)), \end{aligned}$$

care este exact rezultatul găsit mai sus.

Pentru funcția compusă $F = f \circ g$, avem

$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ și apoi

$F''(x) = f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$,

$F'''(x) = f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + 3f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g''(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x)$,

ș.a.m.d.

Problema 12

Să se determine punctele de extrem ale funcției:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 3x$$

Rezolvare. Funcția f este derivabilă pe o mulțime deschisă. Conform Teoremei lui Fermat, derivata f' se anulează în fiecare punct de extrem al funcției. Deoarece $f'(x) = 3x^2 - 3$, avem

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 3 = 0 \iff x \in \{-1, +1\}.$$

Deci, punctele -1 și $+1$ sunt posibilele puncte de extrem ale funcției f .

În punctul $x = -1$ avem

$$f(x) - f(-1) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2).$$

Se vede că pentru $x \in V = (-\infty, 2)$, $f(x) - f(-1) \leq 0$, ceea ce arată că punctul $x = -1$ este punct de maxim local pentru funcția f ; deoarece $f(3) - f(-1) > 0$, rezultă că punctul $x = -1$ nu este punct de maxim absolut pentru funcția f .

În punctul $x = +1$ avem

$$f(x) - f(1) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2).$$

Se vede că pentru $x \in U = (-2, \infty)$, $f(x) - f(1) \geq 0$, ceea ce arată că punctul $x = 1$ este punct de minim local pentru funcția f ; deoarece $f(-3) - f(1) < 0$, rezultă că punctul $x = 1$ nu este punct de minim absolut pentru funcția f .

În concluzie, punctele $x = -1$ și $x = 1$ sunt singurele puncte de extrem local (sau extrem relativ) pentru funcția f (mai exact, ele sunt puncte de extrem local strict pentru funcția f). Valorile funcției în aceste puncte, $f(-1) = 2$ și $f(1) = -2$, se numesc extreme locale (stricte) ale funcției.

■

Observație. În legătură cu Teorema lui Fermat, reamintim următoarele:

Fie o funcție $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și a un punct din D .

Punctul a se numește punct de maxim local (sau relativ) pentru funcția f dacă există o vecinătate V a lui a astfel încât

$$f(x) \leq f(a), \text{ pentru orice } x \in V \cap D.$$

Punctul a se numește punct de minim local (sau relativ) pentru funcția f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât

$$f(x) \geq f(a), \text{ pentru orice } x \in V \cap D.$$

Cu alte cuvinte, punctul a este punct de maxim sau minim local (sau relativ) dacă diferența $f(x) - f(a)$ are semn constant sau se anulează pentru orice $x \in V \cap D$.

Dacă inegalitățile de mai sus au loc pentru orice $x \in D$, atunci punctul a se numește punct de maxim absolut respectiv punct de minim absolut pentru funcția f .

Cu alte cuvinte, punctul a este punct de maxim sau minim absolut dacă diferența $f(x) - f(a)$ are semn constant sau se anulează pentru orice $x \in D$.

Un punct de minim sau de maxim (local sau absolut) pentru f se numește punct de extrem (local sau absolut) pentru funcția f .

Dacă inegalitățile de mai sus sunt stricte pentru $x \neq a$, $x \in V \cap D$, punctul a se numește punct de maxim respectiv minim local strict.

Este evident că un punct de extrem absolut este și un punct de extrem local (relativ) pentru funcția respectivă.

Există o legătură între punctele de extrem și derivata funcției, dată de Teorema Fermat: Dacă a este un punct de extrem local pentru funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, interior mulțimii D , iar f are derivată în punctul a , atunci derivata se anulează în acest punct.

Demonstrația este imediată: presupunând că punctul a este punct de minim local pentru f , avem că

$$f'_s(a) = \lim_{x \nearrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, \quad f'_d(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Cum există $f'(a) = f'_s(a) = f'_d(a)$, rezultă că $f'(a) = 0$.

Dacă a este punct de maxim local, atunci el este punct de minim local pentru $-f$ și concluzia rezultă imediat.

Se numește punct staționar pentru funcția f , un punct interior domeniului de definiție în care derivata se anulează.

Punctele staționare se mai numesc și puncte critice.

O consecință imediată a Teoremei lui Fermat este că pentru o funcție derivabilă pe o mulțime deschisă, punctele de extrem local se află printre punctele staționare ale funcției, adică printre soluțiile ecuației $f'(x) = 0$. Putem decide dacă o soluție x_0 a acestei ecuații este punct de extrem pentru f studiind semnul diferenței $f(x) - f(x_0)$.

Dar, nu orice punct staționar al unei funcții este punct de extrem. Într-adevăr, funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ are un singur punct staționar, anume 0, pentru că $f'(x) = 3x^2$ și ecuația $f'(x) = 0$ are o singură soluție, anume $x = 0$. Acest punct nu este punct de extrem pentru f pentru că diferența $f(x) - f(0) = x^3$ nu are semn constant pe nici o vecinătate a originii (sau pentru că funcția f este strict crescătoare).

Interpretarea geometrică a Teoremei lui Fermat este următoarea: în condițiile Teoremei, într-un punct de extrem local, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox .

Problema 13

Să se arate că ecuația

$$(x-2)(x-3)(x-4) + (x-1)(x-3)(x-4) + \\ + (x-1)(x-2)(x-4) + (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

are toate rădăcinile reale și distincte.

Rezolvare. Ecuația se poate scrie $P'(x) = 0$, unde $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Pe fiecare din intervalele $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, funcția P satisface condițiile Teoremei lui Rolle. Ca urmare, în fiecare din intervalele $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, ecuația $P'(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină. Drept consecință, ecuația $P'(x) = 0$ are cel puțin trei rădăcini reale și distincte. Cum această ecuație este evident de gradul al treilea, rezultă că ea are exact trei rădăcini reale, câte una în fiecare din intervalele de mai sus. ■

Observație. Reamintim Teorema lui Rolle: Fie $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul închis $[a,b]$, derivabilă pe intervalul deschis (a,b) și astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci, există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Demonstrația se bazează pe Teorema lui Weierstrass (vezi Corolarul 4.2.4) și pe Teorema lui Fermat. Fiind continuă, funcția f este mărginită și își atinge marginile pe intervalul compact $[a,b]$, conform Teoremei lui Weierstrass. Fie marginile funcției f , $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$

și $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$, care sunt atinse în punctele x_1 și x_2 din $[a,b]$:

$m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$. Din $m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$, $\forall x \in [a,b]$, rezultă că x_1 și x_2 sunt puncte de extrem absolut ale funcției f . Putem avea doar una din situațiile:

j). punctele x_1 și x_2 coincid cu a sau b : $x_1 = x_2 = a$ sau $x_1 = x_2 = b$ sau $(x_1 = a, x_2 = b)$ sau $(x_1 = b, x_2 = a)$

jj). cel puțin unul din punctele x_1 și x_2 aparține interiorului intervalului $[a,b]$.

În primul caz, rezultă că $f(x) = f(a)$, $\forall x \in [a,b]$ (adică f este constantă pe $[a,b]$). Deci, $f'(c) = 0$ pentru orice $c \in (a,b)$.

În al doilea caz, luăm drept punct c pe acela din punctele x_1 și x_2 care aparține interiorului intervalului $[a,b]$. Conform Teoremei lui Fermat, avem $f'(c) = 0$ și demonstrația este încheiată.

Interpretarea geometrică a Teoremei lui Rolle: dacă segmentul determinat de capetele $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ ale graficului lui f este paralel cu axa Ox , atunci există cel puțin un punct al graficului cuprins între aceste capete în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox .

Exemple simple arată că fiecare din ipotezele Teoremei este esențială (în sensul că dacă una din ele nu se verifică, atunci concluzia nu este în mod obligatoriu adevărată).

O consecință imediată a Teoremei lui Rolle: Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval se află cel puțin un zero al derivatei.

În fapt, această consecință rezolvă problema de mai sus.

Mai reamintim faptul că o funcție $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ care este continuă pe intervalul închis $[a,b]$ și derivabilă pe intervalul deschis (a,b) se numește funcție Rolle.

Problema 14

1. Să se determine punctele de pe parabola cubică $y = x^3$ în care tangenta este paralelă cu segmentul AB, unde $A(-2, -8)$, $B(1, 1)$.

2. Se dau funcțiile $f, g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases},$$
$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 10.$$

Să se arate că se poate aplica Teorema lui Cauchy celor două funcții. Să se aplice Teorema și să se determine efectiv valoarea lui c .

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f(x) = (m + 1)\arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2}$$

să fie constantă pe un subinterval al domeniului său maxim de definiție.

4. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1) + mx,$$

să fie descrescătoare.

5. Să se studieze derivabilitatea funcției

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{|x|}}{1 + |x|}.$$

6. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \sin x$, este lipschitziană pe fiecare interval mărginit $I \subset \mathbb{R}$.

7. Să se arate că funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}}$, depinde de funcția $g(x) = \arctg(x + 1)$. Să se stabilească această dependență.

Rezolvare. 1). Enunțul ne trimite la Interpretarea geometrică a Teoremei lui Lagrange. Se observă că punctele $A(-2, -8)$, $B(1, 1)$ aparțin graficului funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Aplicăm Teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[-2, 1]$. Există cel puțin un punct $c \in (-2, 1)$

astfel încât $f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{3} = 3$. Dar $f'(x) = 3x^2$. Din $3c^2 = 3$ și $c \in (-2, 1)$ rezultă $c = -1$. Așadar, tangenta în punctul $C(-1, -1)$ la parabola cubică $y = x^3$ este paralelă cu segmentul AB dat.

2). Se constată cu ușurință că funcțiile f și g sunt funcții Rolle pe intervalul $[0, 2]$ și că $g'(x) = x^2 - 2x - 3 \neq 0$ pe $(0, 2)$. Se poate aplica Teorema lui Cauchy celor două funcții. Ca urmare, există cel puțin un punct $c \in (0, 2)$ astfel încât $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = -\frac{7}{44}$.

Având în vedere că

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ x^2 - 3x + 2, & \text{dacă } x \in (1, 2) \end{cases},$$

egalitatea $\frac{f'(c)}{g'(c)} = -\frac{7}{44}$ devine $51c^2 - 190c + 111 = 0$, pentru $c \in (0, 1]$ și atunci $c = \frac{37}{51}$, respectiv $51c^2 - 146c + 67 = 0$ pentru $c \in (1, 2)$ și nu avem un astfel de punct c .

În concluzie, doar punctul $c = \frac{37}{51}$ satisface egalitatea din Teorema lui Cauchy pentru funcțiile f și g date.

3). Domeniul maxim de definiție D al funcției f se determină punând condițiile $|x| \leq 1$, $|2x\sqrt{1-x^2}| \leq 1$. Rezultă $D = [-1, 1]$. Se știe că funcția $\arccos x$ este derivabilă pe $(-1, 1)$ și că funcția $\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$ este derivabilă în punctele x în care $2x\sqrt{1-x^2}$ este derivabilă și cuprinsă între -1 și 1 , adică în $x \in (-1, 1)$, $x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pentru $x \in (-1, 1) \setminus \{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\}$, avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= (m+1) \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{1-4x^2(1-x^2)}} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \\ &= \frac{-(m+1)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2(1-2x^2)}{|1-2x^2|\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

și ca urmare,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-m-3}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{dacă } x \in (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \frac{-m+1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{dacă } x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \frac{-m-3}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{dacă } x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1) \end{cases}.$$

Conform unei consecințe a Teoremei lui Lagrange, o funcție derivabilă pe un interval este constantă dacă (și numai dacă) derivata este nulă. Așadar, funcția f este constantă pe un subinterval al domeniului său de definiție dacă și numai dacă $m = 1$ sau $m = -3$. În consecință, avem

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & \text{dacă } x \in (-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}), & \text{pentru } m = -3 \\ c_2, & \text{dacă } x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), & \text{pentru } m = 1 \\ c_3, & \text{dacă } x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1), & \text{pentru } m = -3 \end{cases}$$

Constantele c_i se determină dând lui x valori convenabile din intervalul respectiv. Apoi, din continuitatea funcției f , aceste identități au loc și în capetele intervalelor. De altfel, determinarea constantelor se poate face și folosind continuitatea funcției f . Astfel,

$$\begin{aligned} c_1 &= \lim_{x \searrow -1} c_1 = \lim_{x \searrow -1} f(x) = \\ &= \lim_{x \searrow -1} \left[-2 \arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1-x^2} \right] \\ &= -2\arccos(-1) + \arcsin 0 = -2\pi, \\ c_2 &= f(0) = 2\arccos 0 + \arcsin 0 = \pi, \\ c_3 &= \lim_{x \nearrow 1} c_3 = \lim_{x \nearrow 1} f(x) = \\ &= \lim_{x \nearrow 1} \left[-2 \arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1-x^2} \right] = \\ &= -2\arccos 1 + \arcsin 0 = 0. \end{aligned}$$

În concluzie,

$$f(x) = \begin{cases} -2\pi, & \text{dacă } x \in [-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}], & \text{pentru } m = -3 \\ \pi, & \text{dacă } x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), & \text{pentru } m = 1 \\ 0, & \text{dacă } x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1], & \text{pentru } m = -3 \end{cases}$$

Menționăm că problema poate fi rezolvată și strict trigonometric. Într-adevăr, pentru $x \in D = [-1, 1]$, cu notația $\arcsin x = t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, avem și $x = \sin t$ și atunci,

$$\begin{aligned} f(x) &= (m+1)\arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1-x^2} = \\ &= (m+1)\arccos \sin t + \arcsin 2 \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (m + 1)\arccos \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \arcsin 2 \sin t \cos t = \\
&= (m + 1)\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \arcsin \sin 2t.
\end{aligned}$$

Am ținut cont că $|\cos t| = \cos t$, $\frac{\pi}{2} - t \in [0, \pi]$ și atunci conform definiției lui arccos, $\arccos \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{\pi}{2} - t$.

Pentru $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $2t \in [-\pi, \pi]$. Este necesar să micșorăm intervalul în care se află t pentru a se putea explicita $\arcsin \sin 2t$. Pentru $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, avem $\arcsin x = t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; atunci, $2t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ și deci, $\arcsin \sin 2t = 2t$.

Acum, avem

$$\begin{aligned}
f(x) &= (m + 1)\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2t = (1 - m)t + \frac{\pi}{2}(m + 1) = \\
&= (1 - m)\arcsin x + \frac{\pi}{2}(m + 1)
\end{aligned}$$

și se vede de aici că f este constantă pentru $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dacă și numai dacă $m = 1$. În plus, se vede că constanta este π . Rezultatul coincide cu cel găsit prin metodele Analizei matematice.

Asemănător se procedează pe celelalte două intervale.

4). Funcția dată este derivabilă pe \mathbb{R} . Conform unei consecințe a Teoremei lui Lagrange, o funcție derivabilă pe un interval este descrescătoare dacă (și numai dacă) derivata este negativă pe interval. Mai precis, trebuie să punem condiția $f' \leq 0$ adică $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Deoarece $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + m = \frac{mx^2 + 2x + m}{x^2 + 1}$, condiția de mai sus devine $mx^2 + 2x + m \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Trebuie deci puse condițiile $\Delta = 1 - m^2 \leq 0$ și $m < 0$. De aici rezultă $m \in (-\infty, -1]$.

Așadar, funcția dată este descrescătoare dacă și numai dacă $m \leq -1$.

5). Domeniul maxim de definiție D al funcției f se determină punând condiția $-1 \leq \frac{2\sqrt{|x|}}{1 + |x|} \leq 1$. Condiția se scrie succesiv $1 + |x| \geq 2\sqrt{|x|}$ sau $\left(1 - \sqrt{|x|}\right)^2 \geq 0$ care este evident adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci, $D = \mathbb{R}$.

Funcția este continuă pe D , fiind o compunere de funcții continue (vezi Teorema 4.2.6). Din Teorema de derivabilitate a funcției compuse, rezultă că funcția f este derivabilă în punctele x în care funcția $\frac{2\sqrt{|x|}}{1+|x|}$ este derivabilă și, în plus, $\frac{2\sqrt{|x|}}{1+|x|} < 1$. Calcule simple arată că funcția f este derivabilă în punctele $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Ținând seama de regulile de derivare, pentru $x > 0$, $x \neq 1$, avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{1+x}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(1+x)^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}}} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{1+x}{|1-x|} \cdot \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}, & \text{dacă } x \in (0,1) \\ -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}, & \text{dacă } x \in (1,\infty) \end{cases} \end{aligned}$$

Observăm că există limitele laterale

$$\begin{aligned} \lim_{x \searrow 0} f'(x) &= \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \infty, \\ \lim_{x \nearrow 1} f'(x) &= \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{x \searrow 1} f'(x) &= \lim_{x \searrow 1} -\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Conform unei consecințe a Teoremei lui Lagrange, aceste limite ne conduc la derivatele laterale ale funcției în punctele 0 și 1:

$$f'_d(0) = +\infty, f'_s(1) = \frac{1}{2}, f'_d(1) = -\frac{1}{2}.$$

Ținând seama de faptul că f este funcție pară (adică $f(x) = f(-x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$) și de regula de derivare a funcției compuse, pentru $x < 0$, $x \neq -1$, avem

$$f'(x) = f'(-x) \cdot (-x)' = -f'(-x).$$

Deci,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}(1-x)}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ -\frac{1}{\sqrt{-x}(1-x)}, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \end{cases}.$$

Observăm că există limitele laterale

$$\begin{aligned}\lim_{x \nearrow 0} f'(x) &= \lim_{x \nearrow 0} -\frac{1}{\sqrt{-x(1-x)}} = -\infty, \\ \lim_{x \nearrow -1} f'(x) &= \lim_{x \nearrow -1} \frac{1}{\sqrt{-x(1-x)}} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{x \searrow -1} f'(x) &= \lim_{x \searrow -1} -\frac{1}{\sqrt{-x(1-x)}} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Conform unei consecințe a Teoremei lui Lagrange, aceste limite ne conduc la derivatele laterale ale funcției în punctele 0 și -1:

$$f'_s(0) = -\infty, f'_s(-1) = \frac{1}{2}, f'_d(-1) = -\frac{1}{2}.$$

Din cele spuse mai sus, tragem concluzia că punctele ± 1 sunt puncte unghiulare iar punctul 0 este punct de întoarcere pentru funcția f . Pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, derivata f' este dată de formulele de mai sus.

6). Fie deci $I \subset \mathbb{R}$ un interval mărginit. Pentru $x, y \in I$, aplicând Teorema lui Lagrange, rezultă că

$$\begin{aligned}|x \cdot \sin x - y \cdot \sin y| &= |f'(c)| |x - y| = \\ &= |\sin c + c \cdot \cos c| |x - y| \leq \\ &\leq (|\sin c| + |c| |\cos c|) |x - y| \leq \\ &\leq (1 + r) |x - y|,\end{aligned}$$

unde $r > 0$ este astfel încât $I \subset [-r, r]$ (intervalul I este mărginit).

Deci, funcția este lipschitziană pe fiecare interval mărginit $I \subset [-r, r]$, constanta lui Lipschitz fiind $L = 1 + r$.

7). Domeniul maxim de definiție D al funcției f se determină punând condiția $\left| \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}} \right| \leq 1$. Se constată cu ușurință că $D = \mathbb{R}$. Reamintim că funcția f depinde de funcția g dacă există Φ astfel încât $f = \Phi \circ g$.

Deoarece f și g sunt derivabile (sunt compuneri de astfel de funcții), este de așteptat ca și Φ să fie derivabilă. Atunci, am avea $f' = (\Phi' \circ g)g'$, ceea ce arată că derivata f' ar depinde de funcțiile g și g' . Se impune deci calculul derivatei f' :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}} \right)' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}} \right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)} - x \cdot \frac{2(2x + 2)}{2\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}}}{\left(\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)} \right)^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}} \right)^2}} \cdot \frac{2(x^2 + 2x + 2) - x(2x + 2)}{\left(\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)} \right)^3} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + 4x + 4}{2(x^2 + 2x + 2)}}} \cdot \frac{2(x + 2)}{\left(\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)} \right)^3} = \\
&= \frac{2(x + 2)}{|x + 2|} \cdot \frac{1}{2(x^2 + 2x + 2)} = \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{(x + 1)^2 + 1}, & \text{dacă } x < -2 \\ \frac{1}{(x + 1)^2 + 1}, & \text{dacă } x > -2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Observăm că există limitele laterale

$$\begin{aligned}
\lim_{x \nearrow -2} f'(x) &= \lim_{x \nearrow -2} -\frac{1}{(x + 1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}, \\
\lim_{x \searrow -2} f'(x) &= \lim_{x \searrow -2} \frac{1}{(x + 1)^2 + 1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Conform unei consecințe a Teoremei lui Lagrange, aceste limite ne conduc la derivatele laterale ale funcției în punctul -2 :

$$f'_s(-2) = -\frac{1}{2}, \quad f'_d(-2) = \frac{1}{2}.$$

Ca urmare, funcția f nu este derivabilă în punctul -2 .

De asemenea, se observă că derivata f' depinde de derivata funcției

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{arctg}(x + 1).$$

Mai precis, avem următoarele:

– pe intervalul $(-\infty, -2)$, funcțiile f și $-g$ au aceeași derivată:

$$f'(x) = (-g(x))' = -\frac{1}{(x + 1)^2 + 1}.$$

Conform unei consecințe a Teoremei lui Lagrange, există o constantă k_1 astfel încât $f = -g + k_1$ pe $(-\infty, -2)$. Constanta k_1 se determină prin particularizarea lui x :

$$\begin{aligned} k_1 &= (f + g)(-\sqrt{3} - 1) = \\ &= \arcsin \frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

– pe intervalul $(-2, \infty)$, funcțiile f și g au aceeași derivată:

$$f'(x) = g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2 + 1}.$$

Conform unei consecințe a Teoremei lui Lagrange, există o constantă k_2 astfel încât $f = g + k_2$ pe $(-2, \infty)$. Constanta k_2 se determină prin particularizarea lui x :

$$k_2 = f(0) - g(0) = \arcsin 0 - \operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Combinând rezultatele anterioare, avem

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}} = \begin{cases} -\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{3\pi}{4}, & x < -2 \\ \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{4}, & x > -2 \end{cases}$$

În punctul $x = -2$ avem $f(-2) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ și această valoare se obține și în oricare din cele două ramuri din egalitatea anterioară.

În concluzie, dependența lui f de funcția g este

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}} = \begin{cases} -\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{3\pi}{4}, & x \leq -2 \\ \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{\pi}{4}, & x > -2 \end{cases}$$

Facem următoarea remarcă: determinarea constantelor k_1 și k_2 se poate face și folosind continuitatea sau existența unor limite ale funcțiilor ce apar. De exemplu,

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} k_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}} + \operatorname{arctg}(x+1) \right] = \\ &= \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}. \\ k_2 &= \lim_{x \searrow -2} k_2 = \lim_{x \searrow -2} [f(x) - g(x)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \searrow -2} \left[\arcsin \frac{x}{\sqrt{2(x^2 + 2x + 2)}} - \operatorname{arctg}(x+1) \right] = \\
&= \arcsin(-1) - \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}. \blacksquare
\end{aligned}$$

Observație. Reamintim Teorema lui Lagrange:

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție Rolle, atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demonstrăm un rezultat mai general, și anume Teorema lui Cauchy:

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții Rolle, astfel încât $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$.

Atunci, $g(a) \neq g(b)$ și există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\text{are loc egalitatea } \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Demonstrația este imediată: În primul rând, dacă am avea $g(a) = g(b)$, atunci, din Teorema lui Rolle ar exista cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $g'(c) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Prima parte a concluziei este demonstrată.

În al doilea rând, se consideră funcția ajutătoare $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, unde λ este ales astfel încât F să satisfacă condițiile din Teorema lui Rolle. Aplicând lui F această Teoremă, a doua parte a concluziei este demonstrată.

Se vede că dacă în Teorema lui Cauchy luăm $g(x) = x$, se obține Teorema lui Lagrange.

Interpretarea geometrică a Teoremei lui Lagrange: există cel puțin un punct al graficului lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda determinată de capetele $(a, f(a)), (b, f(b))$ ale graficului lui f .

Exemple simple arată că fiecare din ipotezele Teoremei este esențială (în sensul că dacă una din ele nu se verifică, atunci concluzia nu este în mod obligatoriu adevărată).

Egalitatea $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ din Teorema lui Lagrange se mai poate scrie $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ și se numește formula creșterilor finite.

Teorema lui Lagrange se mai numește Teorema creșterilor finite.

Consecințe ale Teoremei lui Lagrange:

1°. Orice funcție derivabilă care are derivata nulă pe un interval este constantă pe intervalul respectiv. Mai mult, două funcții derivabile pe un interval care au aceeași derivată diferă printr-o constantă pe intervalul respectiv.

Reamintim că proprietatea are loc și reciproc, ca proprietate generală: orice funcție constantă este derivabilă și are derivata nulă.

Ca urmare, o funcție derivabilă pe un interval este constantă dacă și numai dacă are derivata nulă pe intervalul respectiv.

2°. Orice funcție derivabilă a cărei derivată are semn constant pe un interval este monotonă pe intervalul respectiv și anume:

i). dacă $f' \geq 0$ pe I (adică $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$), atunci f este crescătoare pe I ;

ii). dacă $f' \leq 0$ pe I (adică $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$), atunci f este descrescătoare pe I ;

Reamintim că proprietatea are loc și reciproc, ca proprietate generală: derivata oricărei funcții derivabile și monotone pe un interval are semn constant pe intervalul respectiv.

Ca urmare, o funcție derivabilă pe un interval este monotonă dacă și numai dacă derivata are semn constant pe intervalul respectiv.

3°. Fie $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a,b)$. Dacă f este derivabilă pe (a,x_0) , este continuă la stânga în x_0 și dacă există limita $\ell = \lim_{x \nearrow x_0} f'(x)$,

atunci $f'_s(x_0)$ există și $f'_s(x_0) = \ell$.

Analog la dreapta lui x_0 : Dacă f este derivabilă pe (x_0,b) , este continuă la dreapta în x_0 și dacă există limita $\ell = \lim_{x \searrow x_0} f'(x)$, atunci

$f'_d(x_0)$ există și $f'_d(x_0) = \ell$.

4°. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Atunci, f este lipshitziană pe orice subinterval $J \subset I$ pe care derivata f' este mărginită. Demonstrațiile sunt imediate. Pentru început, fie o funcție derivabilă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ care are derivata nulă pe intervalul I . Fie x și a două puncte din I , primul variabil iar al doilea fixat. Presupunem $x > a$. Aplicând Teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[a,x]$, avem $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$, ceea ce arată că f este constantă la dreapta lui a . Analog la stânga lui a .

Acum, ne situăm în condițiile de la 2°i). Fie $x < y$ două puncte oarecare din I . Aplicând Teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[x,y]$, avem $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$, ceea ce arată că f este crescătoare pe I .

În cazul 2°ii), se procedează asemănător.

În cazul 3°, aplicând Teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $[x,x_0]$, unde $x \in (a,x_0)$, avem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$, unde $c_x \in (x,x_0)$.

Deoarece pentru $x \rightarrow x_0$ avem $c_x \rightarrow x_0$, rezultă că $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \nearrow x_0} f'(c_x) = \ell$, ceea ce arată că $f'_s(x_0)$ există și $f'_s(x_0) = \ell$.

În sfârșit, în cazul 4°, considerăm $J = [a, b]$ și fie $M > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leq M, \forall x \in J$. Pentru $x, y \in [a, b]$, aplicând Teorema lui Lagrange, rezultă că

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| |x - y| \leq M|x - y|,$$

ceea ce arată că funcția f este lipschitziană.

Facem precizarea că proprietatea tocmai demonstrată rămâne adevărată și în cazul în care f este derivabilă cu excepția unui număr finit de puncte.

Observație. Reamintim Teorema lui Darboux: Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval I , atunci derivata sa f' are Proprietatea lui Darboux (adică oricare ar fi două puncte $x_1 < x_2$ din I și oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, există cel puțin un punct $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f'(c) = \lambda$).

O consecință importantă: Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe un interval I astfel încât $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. Atunci, sau $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I$ și deci f este strict crescătoare pe I , sau $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$ și deci f este strict descrescătoare pe I .

Această consecință permite stabilirea semnului derivatei unei funcții derivabile și deci a intervalelor de monotonie ale funcției. Astfel, dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval I și dacă a și b sunt două zerouri consecutive ale derivatei, ($f'(a) = f'(b) = 0$ și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$), semnul derivatei este același în orice punct din (a, b) . Acest semn se poate stabili calculând valoarea derivatei într-un punct particular din (a, b) .

Să ne reamintim că o problemă asemănătoare am avut la funcțiile continue.

Problema 15

Să se calculeze următoarele limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax - \sin ax}{\operatorname{tg} bx - \sin bx}, \quad a, b > 0;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}, \quad a, b > 0;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n e^{\frac{1}{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right);$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arcsin \frac{1}{x}\right)^{x^2}; \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}; \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)^x. \end{aligned}$$

Rezolvare. Folosim regulile lui l'Hôpital (vezi mai jos).

a). Limita $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax - \sin ax}{\operatorname{tg} bx - \sin bx}$ în care $a, b > 0$, prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Se observă că funcțiile $f(x) = \operatorname{tg} ax - \sin ax$ și $g(x) = \operatorname{tg} bx - \sin bx$ sunt derivabile pe intervalul $I = (-\frac{\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c})$, unde $c = \max\{a, b\}$. Avem $g'(x) = \frac{b}{\cos^2 bx} - b \cos bx = b \frac{1 - \cos^3 bx}{\cos^2 bx} \neq 0$ pentru $x \in I \setminus \{0\}$.

În sfârșit, avem $\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \frac{1 - \cos^3 ax}{\cos^2 ax}}{b \frac{1 - \cos^3 bx}{\cos^2 bx}} = \frac{a}{b} \cdot$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 ax}{1 - \cos^3 bx} \cdot \frac{\cos^2 bx}{\cos^2 ax} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 ax}{1 - \cos^3 bx}$. Se observă că

și această limită prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Considerăm funcțiile $f_1(x) = 1 - \cos^3 ax$ și $g_1(x) = 1 - \cos^3 bx$ care sunt derivabile pe \mathbb{R} . Avem $g_1'(x) = 3b \cos^2 bx \sin bx \neq 0$ pentru $x \in (-\frac{\pi}{2b}, \frac{\pi}{2b}) \setminus \{0\}$. În sfârșit, avem $\lambda_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3a \cos^2 ax \cdot \sin ax}{3b \cos^2 bx \cdot \sin bx} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 ax}{\cos^2 bx} \cdot \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$.

Se observă că și această limită prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Considerăm funcțiile $f_2(x) = \sin ax$ și $g_2(x) = \sin bx$ care sunt derivabile pe \mathbb{R} . Avem $g_2'(x) = b \cos bx \neq 0$ pentru $x \in (-\frac{\pi}{2b}, \frac{\pi}{2b})$. În sfârșit, avem $\lambda_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2'(x)}{g_2'(x)} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b}$. Aplicând Teorema lui l'Hôpital, avem

$$\lambda_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{a}{b} \cdot \lambda_2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2.$$

Aplicând din nou Teorema lui l'Hôpital, avem

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{a}{b} \cdot \lambda_1 = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

În sfârșit, aplicând din nou Teorema lui l'Hôpital, avem

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax - \sin ax}{\operatorname{tg} bx - \sin bx} = \lambda = \left(\frac{a}{b}\right)^3,$$

ceea ce încheie calculul limitei.

Facem precizarea că limita λ se poate calcula direct, fără a mai fi nevoie de a aplica încă de două ori Teorema lui l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 ax}{1 - \cos^3 bx} = \\ &= \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos ax)(1 + \cos ax + \cos^2 ax)}{(1 - \cos bx)(1 + \cos bx + \cos^2 bx)} = \\ &= \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} \frac{1 + \cos ax + \cos^2 ax}{1 + \cos bx + \cos^2 bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} = \\ &= \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}} \right)^2 \left(\frac{\frac{bx}{2}}{\sin \frac{bx}{2}} \right)^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \left(\frac{a}{b} \right)^3. \end{aligned}$$

S-a folosit limita fundamentală $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

De altfel, este recomandabil ca în calculul limitelor de funcții, să se combine, dacă este posibil, regula lui l'Hôpital cu metodele elementare.

Însăși limita dată se poate calcula direct:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax - \sin ax}{\operatorname{tg} bx - \sin bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax \left(\frac{1}{\cos ax} - 1 \right)}{\sin bx \left(\frac{1}{\cos bx} - 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} \cdot \frac{\cos bx}{\cos ax} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} \cdot \frac{\cos bx}{\cos ax} = \left(\frac{a}{b} \right)^3. \end{aligned}$$

b). Limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}$, în care $a, b > 0$, prezintă nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$. Se observă că funcțiile $f(x) = \ln \sin ax$ și $g(x) = \ln \sin bx$ sunt derivabile pe intervalul $I = (0, \frac{\pi}{2c})$, unde $c = \max\{a, b\}$. Avem $g'(x) = b \operatorname{ctg} bx \neq 0$ pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2c})$. În sfârșit, avem

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{ctg} ax}{b \operatorname{ctg} bx} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} ax}{x \operatorname{ctg} bx} = 1.$$

Conform Teoremei lui l'Hôpital, avem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} = 1$.

S-a urmat recomandarea de mai sus, folosind limita fundamentală a sinusului

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} ax = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin ax} \cdot \cos ax = \frac{1}{a}.$$

c). Limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n e^{\frac{1}{x}}$ prezintă nedeterminarea $0 \cdot \infty$ pentru

că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = (e^{+\infty}) = +\infty$. Scriem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^n}{e^{-\frac{1}{x}}}$

și nedeterminarea se transformă în $\frac{0}{0}$. Funcțiile $f(x) = x^n$ și $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ verifică primele condiții din Teorema lui l'Hôpital pe intervalul $(0,1)$. Apoi avem $\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}}{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nx^{n+1}}{e^{-\frac{1}{x}}}$, ceea ce arată că Teorema lui l'Hôpital nu se poate aplica.

Revenim la limita dată și facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$, $y \rightarrow +\infty$. Ca urmare, (vezi Teorema 4.1.5), avem

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^n}$ și în această limită se poate aplica

Teorema lui l'Hôpital funcțiilor $f(y) = e^y$ și $g(y) = y^n$. Într-adevăr, ele sunt derivabile pe intervalul $(0, \infty)$, $g'(y) = ny^{n-1} \neq 0$ pe $(0, \infty)$ și $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{ny^{n-1}}$. Se vede

de aici că ne găsim într-o situație similară celei inițiale, chiar mai favorabilă, pentru că n a scăzut cu o unitate. Este clar că aplicând repetat Teorema lui l'Hôpital căturilor $\frac{f'}{g'}$, $\frac{f''}{g''}$, \dots , $\frac{f^{(n)}}{g^{(n)}}$ (pentru că f și g sunt de n ori derivabile pe $(0, \infty)$ și derivatele lui g nu se anulează pe acest interval) obținem

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^n} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{ny^{n-1}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{n(n-1)y^{n-2}} = \\ &= \dots = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{n!} = +\infty. \end{aligned}$$

În concluzie, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n e^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^n} = +\infty$.

d). Se constată cu ușurință că limita $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ prezintă nedeterminarea $\infty - \infty$. Transformăm funcția și se obține $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}$. Aici, se aplică Teorema lui l'Hôpital de două ori:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

În concluzie, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = 0$.

e). Deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arcsin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arcsin y}{y} =$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1$, limita dată prezintă nedeterminarea 1^∞ .

Transformăm funcția:

$$\left(x \arcsin \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{\ln \left(x \arcsin \frac{1}{x} \right)^{x^2}} = e^{x^2 \ln \left(x \arcsin \frac{1}{x} \right)}$$

și având în vedere continuitatea exponențială, limita devine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arcsin \frac{1}{x} \right)^{x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(x \arcsin \frac{1}{x} \right)}.$$

Aici, limita $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(x \arcsin \frac{1}{x} \right)$ prezintă nedeterminarea $0 \cdot \infty$, care se poate însă reduce la nedeterminarea $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \left(x \arcsin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(x \arcsin \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}}.$$

Ultima limită se calculează cu Teorema lui l'Hôpital, făcând mai întâi schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$, $t \searrow 0$ (vezi pentru aceasta Teorema 4.1.5)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(x \arcsin \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{t \searrow 0} \frac{\ln \frac{\arcsin t}{t}}{t^2} = \lim_{t \searrow 0} \frac{\ln \arcsin t - \ln t}{t^2} = \\ &= \lim_{t \searrow 0} \frac{\frac{1}{\arcsin t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{t}}{2t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{t - \sqrt{1-t^2} \arcsin t}{2t^3 \arcsin t \sqrt{1-t^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{t \searrow 0} \frac{t - \sqrt{1-t^2} \arcsin t}{t^3} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{t \searrow 0} \frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t}{3t^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

În concluzie, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arcsin \frac{1}{x} \right)^{x^2} = \sqrt[6]{e}$.

f). Evident, limita $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$ prezintă nedeterminarea ∞^0 .

Transformăm funcția:

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

și având în vedere continuitatea exponențială, limita devine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x}.$$

Aici, limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x$ prezintă nedeterminarea $0 \cdot \infty$, care se poate însă reduce la nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$, pentru aplicarea Teoremei lui l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

În concluzie, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

g). Se vede că limita dată prezintă nedeterminarea 0^0 . Transformăm funcția:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)^x &= e^{\ln\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)^x} = \\ &= e^{x \ln\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)} = e^{x \ln 2 \arcsin x} \end{aligned}$$

(s-a ținut seama că $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1, 1]$) și având în vedere continuitatea exponențială, limita devine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln 2 \arcsin x}.$$

Aici, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln 2 \arcsin x$ prezintă nedeterminarea $0 \cdot \infty$, care se poate însă reduce la nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$, pentru aplicarea Teoremei lui l'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln 2 \arcsin x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 2 \arcsin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

În concluzie, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x - \arccos x\right)^x = 1$. ■

Observație. Reamintim că Teoremele lui l'Hôpital dau condiții suficiente pentru calculul unor limite de forma $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, care prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$ [adică în care avem una din situațiile

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ sau $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$. Aceste Teoreme pot fi date într-un singur enunț:

Teorema lui l'Hôpital. Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in [a, b]$ și fie încă funcțiile $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile și astfel încât $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ și există $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ sau dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$, atunci există $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Atunci când x_0 este finit iar funcțiile f și g sunt derivabile (numai) în acest punct, avem

Teorema lui l'Hôpital (2). Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$ și fie încă funcțiile $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile în x_0 și astfel încât $f(x_0) = g(x_0) = 0$ și $g'(x_0) \neq 0$.

Atunci, există o vecinătate V a punctului x_0 astfel încât $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V \setminus \{x_0\}$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Demonstrațiile acestor rezultate se bazează pe Teorema lui Cauchy respectiv pe Definiția derivatei și se găsesc în orice manual de liceu.

Facem câteva precizări în legătură cu aceste rezultate:

1°. Dacă x_0 este unul din capetele intervalului $[a, b]$, atunci în Teoremele lui l'Hôpital vor apare limitele laterale corespunzătoare (vezi pct. b). Chiar dacă x_0 este punct interior intervalului $[a, b]$, Teoremele lui l'Hôpital rămân adevărate dacă limita se înlocuiește cu una din limitele laterale.

2°. Cele două Teoreme au domenii de aplicabilitate diferite.

Exemplu. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 4x - 4, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 2x - 2, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Se constată (vezi o Problemă anterioară) că cele două funcții sunt derivabile doar în punctul $x = 1$. Ca urmare, în calculul limitei

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ - care prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$ - nu se poate aplica Teorema lui l'Hôpital. Se constată însă că se poate aplica Teorema lui l'Hôpital (2). Ca urmare,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{4}{2} = 2.$$

3°. Aplicarea în practică a Teoremelor lui l'Hôpital (pregătirea limitei pentru aplicarea uneia din Teoreme, aplicarea, eventual repetată, a uneia din Teoreme, etc) poartă denumirea de regula lui l'Hôpital.

4°. Repetăm, este recomandabil ca în calculul limitelor de funcții, să se combine, dacă este posibil, regula lui l'Hôpital cu metodele elementare (vezi pct. a, b, c; la c), s-a făcut și o schimbare de variabilă).

5°. Dacă și în calculul limitei $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se poate aplica regula l'Hôpital,

atunci avem $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}$; se spune că s-a aplicat de două ori regula lui l'Hôpital.

Se poate aplica succesiv regula l'Hôpital (dacă este posibil) de un număr finit de ori (vezi pct. a, c).

6°. Uneori, calculul limitei $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ este mai complicat (vezi pct. c)

sau se reduce la limita inițială $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ (vezi la pct. e) calculul limitei

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x \arcsin \frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}}$, fără schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$. Salvarea este

într-un artificiu sau în altă metodă, etc.

Exemplu. În calculul limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}x}{e^x}$ se verifică condițiile din regula

lui l'Hôpital dar, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\operatorname{sh}x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch}x}{e^x} =$ (și la fel) $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\operatorname{ch}x)'}{(e^x)'} =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}x}{e^x}$ și am ajuns de unde am plecat. Regula lui l'Hôpital nu se poate aplica.

Dar limita trebuie calculată, pentru că există:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-2x}) = \frac{1}{2}.$$

7°. Uneori, chiar dacă limita $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ există, derivata g' se anulează în orice vecinătate a punctului x_0 , ceea ce face ca regula lui l'Hôpital să nu se poate aplica.

Exemplu. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x(1 + \frac{\cos x}{x})} = 1$. Derivata $g'(x) = 1$

– $\sin x$ se anulează în orice vecinătate a punctului $x_0 = +\infty$, pentru că $g'(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Regula lui l'Hôpital nu se poate aplica.

8°. Regula lui l'Hôpital se poate aplica și în calculul unor limite care prezintă una din nedeterminările $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 . Pentru aceasta, se transformă funcția astfel încât în calculul limitei să se poată aplica regula lui l'Hôpital. Limitele de la pct. c - g din Problemă sunt edificatoare în acest sens.

În general, se procedează astfel:

i). dacă limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ prezintă nedeterminarea $0 \cdot \infty$, adică

dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, atunci scriem

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ sau } f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

după cum $g(x) \neq 0$ respectiv $f(x) \neq 0$ pe o vecinătate a punctului x_0 . În primul caz, avem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ și această limită prezintă nedeterminarea $\frac{0}{0}$. În al doilea caz, avem $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ și această limită prezintă nedeterminarea $\frac{\infty}{\infty}$.

În calculul acestor limite se încearcă aplicarea regulilor lui l'Hôpital. Alegerea uneia sau alteia dintre variantele (transformările) de mai sus depinde de complexitatea calculelor ce apar.

Exemplu. În calculul limitei $\lim_{x \searrow 0} x \ln x$ este mai convenabil să scriem

$$\lim_{x \searrow 0} x \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \searrow 0} (-x) = 0,$$

decât

$$\lim_{x \searrow 0} x \ln x = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \searrow 0} (-x \ln^2 x),$$

pentru că se complică calculele.

ii). dacă limita $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$ prezintă nedeterminarea $\infty - \infty$,

adică dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, sau dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, atunci scriem

$$f(x) - g(x) = f(x)g(x) \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right),$$

evident posibil pe o vecinătate a punctului x_0 .

Acum avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right)$$

și această limită prezintă nedeterminarea $0 \cdot \infty$. În calculul acestei limite se încearcă aplicarea regulilor lui l'Hôpital după cum s-a spus imediat mai sus.

Uneori, se mai poate scrie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right)$$

și dacă $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, avem $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \pm \infty$, iar în caz contrar, limita prezintă nedeterminarea $0 \cdot \infty$ și în calculul ei se procedează ca mai sus.

Exemplu. În calculul limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$ care prezintă nedeterminarea $\infty - \infty$, este convenabil să scriem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = \infty,$$

pentru că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

În prima variantă, ar trebui scris, de exemplu,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}$$

și se vede că apar probleme de calcul.

iii). dacă limita $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$ prezintă una din nedeterminările 1^∞ , 0^0 , ∞^0 , atunci scriem

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)},$$

evident posibil pe o vecinătate a punctului x_0 .

Acum avem

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)},$$

și această ultimă limită prezintă, în fiecare caz, nedeterminarea $0 \cdot \infty$. În calculul acestei limite se încearcă aplicarea regulilor lui l'Hôpital după cum s-a spus mai sus.

9°. Regula lui l'Hôpital se poate aplica și în calculul unor limite de șiruri, dar nu direct, ci prin intermediul Criteriului lui Heine privind limita unei funcții într-un punct.

Astfel, dacă avem de calculat $\lim x_n$, căutăm mai întâi o funcție $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Apoi, calculăm - eventual cu regula lui l'Hôpital, - limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lambda$. În sfârșit, având în vedere Criteriul lui Heine privind limita unei funcții într-un punct (vezi Teorema 4.1.1), obținem $\lim x_n = \lambda$.

Facem precizarea că în rolul șirului (n) pentru care $f(n) = x_n$, se poate considera un șir (y_n) convenabil ales astfel încât

$$\lim y_n = \infty \text{ și } f(y_n) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple. i). Pentru calculul limitei $\lim \frac{n^2}{e^n}$, considerăm funcția ajutătoare $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{e^x}$. Se vede că $x_n = \frac{n^2}{e^n} = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Aplicând Regula lui l'Hôpital de două ori, avem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

În concluzie, $\lim \frac{n^2}{e^n} = 0$.

ii). Pentru calculul limitei $\lim \sqrt[n]{\arctg \frac{1}{n}}$, considerăm funcția ajutătoare $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (\arctg x)^x$. Se vede că $x_n = \sqrt[n]{\arctg \frac{1}{n}} = f(\frac{1}{n}), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Calculăm limita $\lim_{x \rightarrow 0} (\arctg x)^x$, aplicând cele indicate imediat mai sus la pct. 8° :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\arctg x)^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\arctg x)} = 1,$$

pentru că Regula lui l'Hôpital ne dă

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\arctg x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\arctg x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\arctg x} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctg x} \cdot \frac{-x}{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

În concluzie, $\lim \sqrt[n]{\arctg \frac{1}{n}} = 1$.

Problema 16

1. Pentru funcțiile e^x și $\sin x$ să se scrie
 - i). polinoamele Taylor de ordinele 1, 2, 3, ... n în punctul $a = 0$;
 - ii). formulele Taylor de ordinele 1, 2, 3, ... n în punctul $a = 0$.
2. Folosind formula lui Taylor, să se calculeze limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{\sin x - x}.$$

3. Să se arate că dacă f este o funcție polinomială de grad k , atunci formula lui Taylor de orice ordin $n \geq k$ în orice punct $a \in \mathbb{R}$ este exactă (adică restul este nul).
4. Să se determine toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f'''(x) = 0, x \in \mathbb{R} \text{ și } f(1) = 1, f'(1) = 2, f''(1) = 2.$$

5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n \sin x$, unde $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că originea este punct de extrem local pentru funcția f în cazul $n = 1$, dar nu și în cazurile $n = 0$, $n = 2$.

Rezolvare. 1). i). Derivatele de ordin superior ale funcției e^x sunt $(e^x)^{(n)} = e^x$ și ca urmare, toate derivatele lui e^x în origine sunt egale cu 1. Polinoamele Taylor cerute pentru funcția e^x sunt

$$\begin{aligned} T_1(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x, \\ T_2(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2, \\ T_3(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 \\ T_4(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \\ T_5(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \\ &\dots\dots\dots \\ T_n(x) &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n \end{aligned}$$

Derivatele funcției sinus sunt $(\sin)^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ și ca urmare, derivatele de ordin superior ale funcției sinus în origine sunt $(\sin)^{(n)}(0) = \sin(n\frac{\pi}{2})$. Polinoamele Taylor cerute pentru funcția sinus sunt

$$\begin{aligned}
T_1(x) &= x \\
T_2(x) &= x \\
T_3(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 \\
T_4(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 \\
T_5(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \\
&\dots\dots\dots \\
T_{2n+1}(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
T_{2n+2}(x) &= T_{2n+1}(x)
\end{aligned}$$

ii). Formulele lui Taylor cerute pentru funcțiile e^x și sinus sunt (cu restul sub forma lui Peano)

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + x^2\omega_2(x), \\
e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + x^3\omega_3(x), \\
e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + x^4\omega_4(x), \\
e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{5!}x^5 + x^5\omega_5(x), \\
&\dots\dots\dots \\
e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + x^n\omega_n(x).
\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
\sin x &= x + x\alpha_1(x), \\
\sin x &= x + x^2\alpha_2(x), \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\alpha_3(x), \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + x^4\alpha_4(x), \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + x^5\alpha_5(x), \\
&\dots\dots\dots \\
\sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} \\
&\quad + x^{2n+1}\alpha_{2n+1}(x), \\
\sin x &= T_{2n+2}(x) + x^{2n+2}\alpha_{2n+2}(x).
\end{aligned}$$

În toate aceste formule, funcțiile ω_i și α_j sunt continue și nule în 0.

2). Pentru calculul limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{\sin x - x}$, înlocuim pe $\sin x$ și e^x cu formulele stabilite mai sus:

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{\sin x - x} = \\
= & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + x^3\omega_3(x)) - 2 - 2x - x^2}{x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\alpha_3(x) - x} = \\
= & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3!}x^3 + 2x^3\omega_3(x)}{-\frac{1}{3!}x^3 + x^3\alpha_3(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3!} + 2\omega_3(x)}{-\frac{1}{3!} + \alpha_3(x)} = -2.
\end{aligned}$$

3). În formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange, expresia restului de ordin n este

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Se vede de aici că dacă f este o funcție polinomială de grad k și $n \geq k$, atunci $f^{(n+1)} = 0$ și ca urmare, $R_n = 0$.

Așadar, pentru orice funcție polinomială f de grad k și $n \geq k$ se poate scrie

$$\begin{aligned}
f(x) = & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\
& \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,
\end{aligned}$$

$a \in \mathbb{R}$ fiind dat, oarecare.

4). Conform unei consecințe a Teoremei lui Lagrange, din egalitatea $f'''(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ rezultă că f este un polinom de grad cel mult 2: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Condițiile din enunț $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 2$ ne dau $a + b + c = 1$, $2a + b = 2$ și $2a = 2$. Rezultă $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Așadar, $f(x) = x^2$ este singura funcție care verifică cerințele date.

Altfel, folosind rezultatul de la punctul anterior, avem soluția

$$f(x) = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 = x^2.$$

5). Pentru $f(x) = x \sin x$ avem $f'(x) = \sin x + x \cos x$ și $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$, de unde $f'(0) = 0$, $f''(0) = 2$.

Formula lui Taylor de ordinul doi pentru funcție în origine ne dă $f(x) = x^2 + x^2\omega(x)$, unde funcția ω este continuă și nulă în 0. Ca urmare, $f(x) = x^2(1 + \omega(x)) \geq 0 = f(0)$, $x \in V_0$, ceea ce arată că originea este punct de minim local pentru funcția f în cazul $n = 1$.

În cazul $n = 0$, funcția $f(x) = \sin x$ este strict crescătoare pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Ca urmare, originea nu este punct de extrem local pentru funcția f .

În cazul $n = 2$, avem $f(x) = x^2 \sin x$ și ca urmare

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x,$$

$$f''(x) = 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x,$$

$$f'''(x) = 6 \cos x - 6x \sin x - x^2 \cos x.$$

Pentru că $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$, formula lui Taylor de ordinul trei pentru funcție în origine ne dă

$$f(x) - f(0) = x^3 (1 + \omega(x)),$$

unde funcția ω este continuă și nulă în 0.

Deoarece paranteza este pozitivă pe o vecinătate a lui 0 iar factorul x^3 are semn variabil în jurul lui 0, diferența $f(x) - f(0)$ nu are semn constant pe nici o vecinătate a originii. Punctul 0 nu este punct de extrem local pentru funcția f . ■

Observație. Formula lui Taylor se găsește în §5.4/5.4.1.

Aplicații ale formulei lui Taylor:

1°. Formula lui Taylor permite stabilirea unui rezultat privind punctele de extrem ale unei funcții:

“Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de n ori derivabilă pe o vecinătate V_a a punctului a , interior lui I , $n \geq 2$ și astfel încât

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0,$$

Dacă n este număr par, atunci a este punct de extrem local pentru f și anume maxim, dacă $f^{(n)}(a) < 0$ și minim dacă $f^{(n)}(a) > 0$.

Dacă n este număr impar, atunci a nu este punct de extrem local pentru f (este punct de inflexiune pentru f).”

Într-adevăr, Formula lui Taylor în punctul a cu restul Peano ne dă

$$f(x) - f(a) = (x - a)^n \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(a) + \omega(x) \right),$$

unde funcția ω este continuă și nulă în a .

Fie n număr par. Deoarece paranteza are semnul lui $f^{(n)}(a)$, diferența $f(x) - f(a)$ are semn constant pe o vecinătate a punctului a . Aceasta arată că acest punct este un punct de extrem local pentru f . Ultima parte a afirmației rezultă imediat.

Dacă n este număr impar, din egalitatea anterioară se deduce că diferența $f(x) - f(a)$ are semne diferite la stânga și la dreapta punctului a . Aceasta arată că acest punct nu este un punct de extrem local pentru f . Ultima parte a afirmației rezultă imediat.

Exemplu. Vezi pct. 5) din Problemă.

2°. Formula lui Taylor permite aproximarea unei funcții prin polinoame de grad superior.

În general, Formula lui Taylor ne permite să facem aproximarea $f(x) \approx T_n(x)$ în jurul punctului x_0 în care este scris T_n .

Exemplu. Determinăm un polinom P care să aproximeze funcția $f(x) = e^x$ pe intervalul $[-1, 1]$ cu două zecimale exacte.

Căutăm pe P ca un polinom Taylor de anumite ordin n . În Formula lui Taylor $e^x = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}$, punem condiția

$$\left| \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x} \right| < 10^{-2}, \text{ pentru } x \in [-1, 1]$$

și de aici determinăm pe n .

Se observă că pentru $x \in [-1, 1]$ avem $\left| \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$.

Inegalitatea $\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-2}$ se verifică pentru $n \geq 5$.

Ca urmare, condiția de mai sus se verifică pentru $n \geq 5$.

Așadar, avem formula de aproximare

$$e^x \approx 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5, x \in [-1, 1],$$

eroarea de aproximare fiind mai mică decât $\frac{1}{100}$.

Alte formule de aproximare se pot stabili folosind formulele de la a)

și altele asemănătoare:

$$\begin{aligned} \sin x &\approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \\ \ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \end{aligned}$$

Ramâne de stabilit eroarea de aproximare în fiecare formulă.

3°. Formula lui Taylor permite determinarea unui polinom când se cunosc derivatele sale succesive într-un punct dat.

Exemplu. Determinăm un polinom P de grad minim pentru care

$$P(2) = 0, P'(2) = 0, P''(2) = 0, P'''(2) = 1.$$

Din cele spuse la 3), polinomul P căutat este

$$P(x) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P^{(3)}(2)}{3!}(x-2)^3.$$

Efectuând calculele, $P(x) = \frac{1}{3!}(x-2)^3$.

Problema 17

Să se determine punctele de extrem, intervalele de monotonie și intervalele de convexitate/concavitate ale funcțiilor:

- a). $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$;
 b). $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x} \sin x$

Rezolvare. a). Funcția f este o compunere de funcții derivabile: funcția arccos este derivabilă pe $(-1,1)$ iar funcția $\frac{2x}{1+x^2}$ este derivabilă pe \mathbb{R} . Deoarece funcția $\frac{2x}{1+x^2}$ ia valorile ± 1 în punctele ± 1 , tragem concluzia că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \begin{cases} \frac{-2}{1+x^2}, & \text{dacă } |x| < 1 \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } |x| > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Având în vedere o consecință a Teoremei lui Lagrange, funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-1,1)$ (deoarece derivata f' este negativă pe acest interval) și crescătoare pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$ și $(1, \infty)$ (deoarece derivata f' este pozitivă pe fiecare din aceste intervale). Mai rezultă că punctele ± 1 sunt puncte de extrem (absolut) pentru f: -1 este punct de maxim absolut pentru f, $M = f(-1) = \pi$ fiind marginea superioară a funcției iar $+1$ este punct de minim absolut pentru f, $m = f(1) = 0$ fiind marginea inferioară a funcției.

Facem precizarea că o altă consecință a Teoremei lui Lagrange ne arată că în punctele ± 1 avem

$$f'_s(-1) = 1, f'_d(-1) = -1, f'_s(+1) = -1, f'_d(+1) = 1.$$

Ca urmare, aceste puncte sunt puncte unghiulare pentru funcția f .

Deoarece derivata f' este funcție rațională pe fiecare din cele trei intervale deschise menționate mai sus, rezultă că f este de două ori derivabilă pe aceste intervale și avem

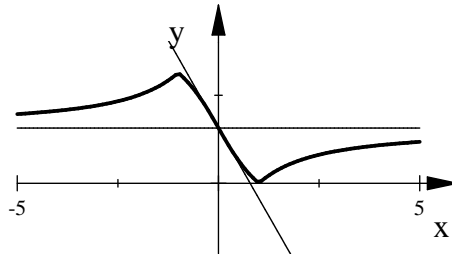
$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{4x}{(1+x^2)^2}, & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ \frac{-4x}{(1+x^2)^2}, & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}.$$

Se vede de aici că $f''(0) = 0$ și că derivata secundă f'' are semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$. Ca urmare, funcția f este convexă pe fiecare din intervalele $(-\infty, -1)$ și $(0, 1)$, (pentru că f'' este pozitivă pe aceste intervale) și este concavă pe fiecare din intervalele $(-1, 0)$ și $(1, \infty)$ (pentru că f'' este negativă pe aceste intervale).

Facem precizarea că punctele -1 , 0 și $+1$ sunt, conform Definiției, puncte de inflexiune pentru f .

Se observă că punctele ± 1 sunt, fiecare, punct de extrem, punct unghiular și punct de inflexiune pentru f . Punctul 0 este punct de inflexiune în care tangenta la grafic străbate graficul.

Toate acestea se pot vedea pe graficul funcției f :



b). Funcția g este de clasă C^2 pe \mathbb{R} , fiind un produs a două astfel de funcții. Se constată cu ușurință că

$$g'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x) \text{ și } g''(x) = -2e^{-x} \cos x.$$

Deoarece $\cos x - \sin x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) - \sin x = \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - x)$, zerourile derivatei g' sunt date de ecuația trigonometrică $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0$ și sunt $x'_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Zerourile derivatei secunde g'' sunt date de ecuația trigonometrică $\cos x = 0$ și sunt $x''_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Dăm, în tabloul de mai jos, semnul derivatelor g' și g'' pe intervalul $[0, 2\pi]$; în restul axei reale, semnul se repetă, deoarece funcțiile trigonometrice \sin și \cos sunt 2π -perioadice:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$g'(x)$	+	+	0	-	-	-
$g''(x)$	-	-	-	0	+	+

De aici se pot trage următoarele concluzii:

- pe fiecare din intervalele $[2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi + \frac{5\pi}{4}]$, $n \in \mathbb{Z}$, funcția g este descrescătoare,
- pe fiecare din intervalele $[2n\pi - \frac{3\pi}{4}, 2n\pi + \pi + \frac{\pi}{4}]$, $n \in \mathbb{Z}$, funcția g este crescătoare,
- punctele $x'_{2n} = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, sunt puncte de maxim local pentru funcția g ,
- punctele $x'_{2n+1} = 2n\pi + \frac{5\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, sunt puncte de minim local pentru funcția g ,
- pe fiecare din intervalele $[2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{3\pi}{2}]$, $n \in \mathbb{Z}$, funcția g este convexă,
- pe fiecare din intervalele $[2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $n \in \mathbb{Z}$, funcția g este concavă,
- punctele $x''_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ sunt puncte de inflexiune pentru g în care tangenta la grafic străbate graficul funcției. ■

Observație. Pentru determinarea intervalelor de monotonie ale unei funcții se procedează astfel:

1°. se studiază derivabilitatea funcției; se stabilesc punctele în care funcția nu este derivabilă; se calculează derivata;

2°. se determină zerourile derivatei;

3°. se determină semnul derivatei.

4°. se concluzionează:

– pe un interval pe care derivata este pozitivă, funcția este strict crescătoare;

– pe un interval pe care derivata este negativă, funcția este strict descrescătoare.

Uneori, rezultatele de la punctele 1° - 3° se așază într-un tablou cu trei linii: pe prima linie se precizează domeniul de definiție (o bară verticală sau o zonă hașurată arată că funcția nu este definită acolo), zerourile derivatei și punctele în care funcția nu este derivabilă; pe linia a doua se precizează semnul derivatei (o bară verticală arată că funcția nu este derivabilă; de-o parte și de alta a barei se trec derivatele laterale, dacă este cazul); pe linia a treia se pun valorile sau limitele funcției și se indică prin săgeți monotonia funcției.

Exemplu. Tabloul privind monotonia funcției g :

x	0		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$		2π	
$g'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$g(x)$	\nearrow	\nearrow	$g(\frac{\pi}{4})$	\searrow	$g(\frac{5\pi}{4})$	\nearrow	\nearrow

În legătură cu convexitatea (concavitatea) unei funcții, amintim următoarele:

O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă (concavă) pe intervalul $I \subset D$ dacă pentru orice $a, b \in I$, segmentul de dreaptă de capete $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ se află deasupra porțiunii (sub porțiunea) din graficul funcției corespunzătoare intervalului $[a, b]$.

Analitic, aceasta înseamnă că se verifică condiția

$$\forall a, b \in I, \forall t \in [0, 1] \implies f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b),$$

respectiv

$$\forall a, b \in I, \forall t \in [0, 1] \implies f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Caracterizarea convexității/concavității cu ajutorul derivatelor este dată de următoarele rezultate, a căror demonstrație este un simplu exercițiu:

I. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I . Atunci, funcția f este convexă (concavă) pe I dacă și numai dacă derivata f' este crescătoare (descrescătoare) pe I .

II. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I . Atunci, funcția f este convexă (concavă) pe I dacă și numai dacă graficul funcției se află deasupra (dedesuptul) oricărei tangente la grafic.

III. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe intervalul I . Atunci, funcția f este convexă (concavă) pe I dacă și numai dacă $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) pentru orice $x \in I$.

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul I . Se spune că un punct a din interiorul intervalului I este punct de inflexiune pentru f dacă există α și β din I astfel încât $\alpha < a < \beta$ și f este convexă pe $(\alpha, a]$ și concavă pe $[a, \beta)$ sau invers (simplu vorbind, la trecerea printr-un punct de inflexiune, funcția schimbă convexitatea).

În acest caz, punctul $(a, f(a))$ se numește punct de inflexiune al graficului funcției f .

Caracterizarea punctelor de inflexiune cu ajutorul derivatelor este dată de următoarele rezultate, a căror demonstrație este un simplu exercițiu:

IV. Într-un punct de inflexiune în care funcția este derivabilă, tangenta la grafic străbate graficul.

V. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care are derivată în a și este de două ori derivabilă pe V_a , eventual cu excepția lui a . Atunci;

– dacă a este punct de inflexiune pentru f , atunci sau f nu este de două ori derivabilă în a sau $f''(a) = 0$;

– dacă f'' schimbă semnul la trecerea prin a , atunci a este punct de inflexiune pentru f .

Pentru determinarea intervalelor de convexitate (concavitate) ale unei funcții derivabile, se procedează astfel:

1. se studiază derivabilitatea de ordin doi a funcției; se stabilesc punctele în care funcția nu este derivabilă de două ori; se calculează derivata de ordinul doi;

2°. se determină zerourile derivatei de ordinul doi;

3°. se determină semnul derivatei de ordinul doi.

4°. se concluzionează:

- pe un interval pe care derivata a doua este pozitivă, funcția este (strict) convexă;
- pe un interval pe care derivata a doua este negativă, funcția este (strict) concavă.

Uneori, rezultatele de la punctele 1° - 3° se așază într-un tablou asemănător celui de la monotonie (sau se adaugă la acel tablou încă o linie, corespunzătoare derivatei a doua). Semnul \smile (\frown) pus pe linia funcției arată că funcția este convexă (concavă) pe intervalul respectiv.

Exemplu. Tabloul privind monotonia și convexitatea funcției g:

x	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{9\pi}{4}$
$g'(x)$	0	-	-	-	0	+	+	+	0
$g''(x)$	-	-	0	+	+	+	0	-	-
g(x)	$g(\frac{\pi}{4})$	\frown	$g(\frac{\pi}{2})$	\frown	$g(\frac{5\pi}{4})$	\smile	$g(\frac{3\pi}{2})$	\smile	$g(\frac{9\pi}{4})$

Aflăm de aici, de exemplu, că pe intervalul $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, funcția g descrește de la $g(\frac{\pi}{4})$ la $g(\frac{\pi}{2})$ și este concavă. Pe intervalul $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}]$, funcția g descrește de la $g(\frac{\pi}{2})$ la $g(\frac{5\pi}{4})$ și este convexă. Etc.

Problema 18

Se dă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x}$, unde D este domeniul său maxim de definiție. Se cere:

- Să se reprezinte grafic funcția;
- Să se discute după $m \in \mathbb{R}$ natura și semnele rădăcinilor ecuațiilor:

ii₁). $x^3 - mx + 2 = 0$;

ii₂). $f(x) = -3\sqrt[3]{2}(x + \sqrt[3]{2}) + m$.

Rezolvare. i). Avem $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Limitele la capetele domeniului D sunt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty.$$

De aici, rezultă că dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală (de ambele părți) la graficul lui f și că graficul funcției nu are asimptote horizontale.

Din $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 2}{x^2} = \pm\infty$, rezultă că graficul nu are asimptotă oblică la $\pm\infty$. Dar, deoarece

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x^2) = 0,$$

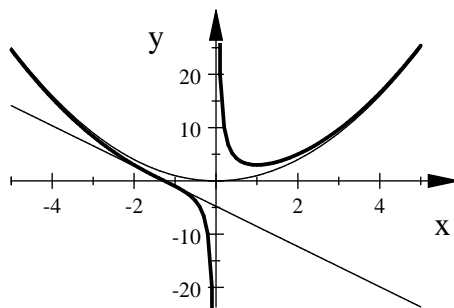
graficul funcției are curba asimptotă $y = x^2$, la $\pm\infty$.

Din $f(x) - x^2 = \frac{2}{x}$ se constată că $f(x) > x^2$ pentru $x > 0$ și $f(x) < x^2$ pentru $x < 0$. Deducem de aici că graficul funcției este deasupra curbei asimptotă pentru $x > 0$ și sub curba asimptotă pentru $x < 0$.

Avem $f'(x) = 2\frac{x^3-1}{x^2}$ și $f''(x) = 2\frac{x^3+2}{x^3}$, pentru $x \in D$.

Tabelul de variație și graficul funcției:

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	-	+
$f''(x)$		+	0	-	+
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	0	\searrow	$+\infty$



Graficul lui f cu tangenta în punctul de inflexiune

ii₁). Ecuația $x^3 - mx + 2 = 0$ nu are rădăcina $x = 0$ și ca urmare, este echivalentă cu ecuația $\frac{x^3 + 2}{x} = m$, adică

cu ecuația $f(x) = m$. Numărul rădăcinilor reale ale acestei ecuații coincide cu numărul soluțiilor reale (x, y) ale sistemului $\begin{cases} y = f(x) \\ y = m \end{cases}$, adică cu numărul punctelor de intersecție a graficului lui f cu dreapta variabilă $y = m$.

Având în vedere graficul lui f , obținem:

– pentru $m < 3$, ecuația dată are o singură rădăcină reală, negativă (pentru că dreapta $y = m$ intersectează doar ramura din stânga a graficului lui f);

– pentru $m = 3$, ecuația dată are trei rădăcini reale, una negativă și una dublă, egală cu 1 (pentru că dreapta $y = 3$ intersectează atât ramura din stânga a graficului lui f cât și ramura din dreapta, aceasta exact în punctul de minim $(1, 3)$);

– pentru $m > 3$, ecuația dată are trei rădăcini reale distincte, una negativă și două pozitive, una subunitară și cealaltă supraunitară (pentru că dreapta $y = m$ intersectează atât ramura din stânga a graficului lui f cât și ramura din dreapta, aceasta în două puncte distincte).

ii₂). Ecuația se poate scrie $f(x) + 3\sqrt[3]{2}(x + \sqrt[3]{2}) = m$. Discuția ecuației se face ca mai sus, folosind însă graficul funcției ajutoare $f(x) + 3\sqrt[3]{2}(x + \sqrt[3]{2})$.

Altfel, se observă că $y = -3\sqrt[3]{2}(x + \sqrt[3]{2})$ este tangenta în punctul de inflexiune $x = -\sqrt[3]{2}$ al lui f . Ca urmare, $y = -3\sqrt[3]{2}(x + \sqrt[3]{2}) + m$ este o dreaptă variabilă, paralelă cu tangenta menționată.

Se impune determinarea tangentei la ramura din dreapta a graficului lui f paralelă cu tangenta menționată mai sus. Ținând cont de interpretarea geometrică a derivatei unei funcții într-un punct, avem de rezolvat ecuația $f'(x) = -3\sqrt[3]{2} = f'(-\sqrt[3]{2})$. Este clar că această ecuație are o rădăcină (dublă!) egală cu $-\sqrt[3]{2}$. A treia rădăcină este $x_0 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \in (0, 1)$, după cum era de așteptat, conform graficului. Tangenta în x_0 este $y - f(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}) = -3\sqrt[3]{2}(x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2})$ adică $y = -3\sqrt[3]{2}x + \frac{15}{4}\sqrt[3]{4}$. Scriem această ecuație sub forma ecuației dreptei variabile de mai sus:

$$y = -3\sqrt[3]{2}(x + \sqrt[3]{2}) + \frac{27}{4}\sqrt[3]{4}.$$

Având în vedere graficul lui f și semnificația lui m din ecuația dreptei variabile de mai sus, obținem:

– pentru $m \in (-\infty, \frac{27}{4}\sqrt[3]{4})$, ecuația dată are o singură rădăcină reală, negativă (pentru că în acest caz, dreapta $y = -3\sqrt[3]{2}(x + \sqrt[3]{2}) + m$ intersectează doar ramura din stânga a graficului lui f); De exemplu, pentru $m = 0$, ecuația dată are o singură rădăcină reală, $x = -\sqrt[3]{2}$;

– pentru $m = \frac{27}{4}\sqrt[3]{4}$, ecuația dată are trei rădăcini reale, una negativă și una dublă, egală cu $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$ (pentru că în acest caz, dreapta variabilă $y = -3\sqrt[3]{2}(x + \sqrt[3]{2}) + m$ intersectează atât ramura din stânga a graficului lui f cât și ramura din dreapta, aceasta exact în punctul de tangență $(x_0, f(x_0))$);

– pentru $m \in (\frac{27}{4}\sqrt[3]{4}, +\infty)$, ecuația dată are trei rădăcini reale distincte, una negativă și două pozitive, una mai mică decât x_0 și cealaltă mai mare decât x_0 (pentru că în acest caz, dreapta variabilă $y = -3\sqrt[3]{2}(x + \sqrt[3]{2}) + m$ intersectează atât ramura din stânga a graficului lui f cât și ramura din dreapta, aceasta în două puncte distincte).

Observație. Amintim că graficul funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$. Când f este continuă și G_f se reprezintă într-un plan raportat la un sistem cartezian ortogonal de axe xOy , se obține o curbă de ecuație algebrică $y = f(x)$. Această curbă se numește tot graficul lui f (vezi Drumuri și curbe în 5.9.1/§5.9).

Graficul unei funcții permite atât ilustrarea proprietăților ei locale și globale, cât și rezolvarea unor probleme privind, de exemplu, ecuații sau inecuații.

Reprezentarea grafică a unei funcții presupune parcurgerea următoarelor etape:

- 1°. Determinarea domeniului maxim de definiție;
- 2°. Calculul limitelor la capetele domeniului de definiție, determinarea asimptotelor;
- 3°. Studiul derivatelor f' și f'' ;
- 4°. Tabloul de variație;
- 5°. Trasarea graficului.

Detalii se pot găsi în orice manual de Matematică, cls. a XI - a.

Unele probleme se pot rezolva cu ajutorul graficului unei funcții. De exemplu:

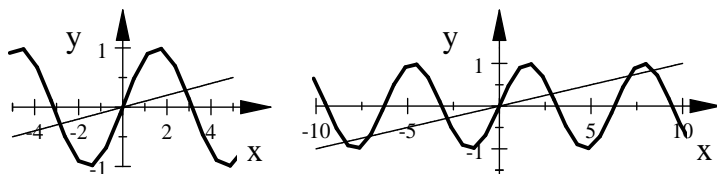
- i). Discuția ecuației $f(x) = m$, m parametru real;
- ii). Discuția ecuației $f(x) = ax + b$, a fiind dat și b parametru sau invers;
- iii). Rezolvarea grafică a unor ecuații;

A rezolva grafic ecuația $f(x) = g(x)$ revine la determinarea absciselor punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g . Evident, graficele trebuie trasate cu precizie (pe hârtie milimetrică și cu folosirea unor puncte suplimentare pe grafice).

Exemplu. Să determinăm numărul rădăcinilor ecuației $\sin x = \frac{x}{10}$.

Pe același sistem de axe desenăm graficele funcțiilor $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \frac{x}{10}$, în două situații: pentru $x \in [-5, 5]$ și pentru $x \in [-10, 10]$.

Din prima figură nu putem trage nici o concluzie privind numărul rădăcinilor ecuației. În schimb, din a doua figură tragem concluzia că ecuația dată are 7 rădăcini și acestea sunt situate în intervalul $[-10, 10]$. O privire atentă permite să și localizăm aceste soluții:



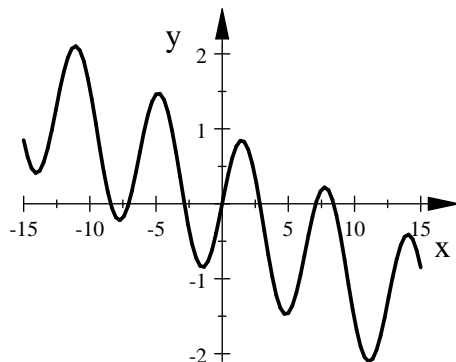
Facem observația că ecuația $f(x) = g(x)$ se mai poate scrie $f(x) - g(x) = 0$. Acum, a rezolva grafic ecuația $h(x) = 0$ revine la determinarea absciselor punctelor de intersecție ale graficului lui h cu axa Ox .

În exemplul considerat, ecuația $\sin x = \frac{x}{10}$ se scrie $\sin x - 0.1x = 0$. Din graficul lui $h(x) = \sin x - 0.1x$ tragem aceleași concluzii.

- iv). Rezolvarea grafică a unor inecuații.

Este clar că soluția unei inecuații $f(x) > g(x)$ este mulțimea valorilor lui x în care graficul lui f este situat deasupra graficului lui g .

Dacă scriem inecuația sub forma $h(x) = f(x) - g(x) > 0$, soluția inecuației este mulțimea valorilor lui x în care graficul lui h este situat deasupra axei Ox .



Graficul lui h .

De exemplu, din graficul funcției f din problemă se vede că

$$f(x) < 0 \iff x \in (-\sqrt[3]{2}, 0).$$

Problema 19

Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuațiilor

- i). $2x^2 + x - 4 - 5\ln |x| = 0$;
- ii). $2x^3 - 3x^2 + 6(m - m^2)x + 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Folosim șirul lui Rolle.

i). Fie funcția $f(x) = 2x^2 + x - 4 - 5\ln |x|$, definită pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ecuția $f'(x) = 0$ este $4x^2 + x - 5 = 0$ și are rădăcinile $x_1 = -\frac{5}{4}$, $x_2 = 1$. Avem $f(-\frac{5}{4}) < 0$, $f(1) < 0$ și apoi $f(0^-) = \infty$, $f(0^+) = \infty$, $f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $f(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Datele obținute le organizăm în tabloul

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	0	1	∞	
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\frac{5}{4})$	$+\infty$	$+\infty$	$f(1)$	$+\infty$

Șirul lui Rolle pentru f este șirul semnelor valorilor din ultima linie, adică $+, -, +, -, +$. Există patru variații de semn, deci ecuația dată are patru rădăcini reale, situate în intervalele $(-\infty, -\frac{5}{4})$, $(-\frac{5}{4}, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$. Aceste intervale corespund în linia lui x din tablou la variațiile de semn din șirul lui Rolle.

Intervalele ce conțin rădăcinile pot fi micșorate până la lungimea 1. Într-adevăr, din $f(-3) > 0$, $f(-2) < 0$, $f(-1) < 0$, $f(2) > 0$, rezultă că cele patru rădăcini reale sunt situate în intervalele $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$.

ii). Fie funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6(m - m^2)x + 1.$$

Ecuația $g'(x) = 0$ este $x^2 - x + (m - m^2) = 0$ și are rădăcinile $x_1 = m$ și $x_2 = 1 - m$. Deoarece x_1 și x_2 depind de m , se impune o discuție după valorile lui m , pentru a preciza ordinea lor pe axa reală.

Deoarece $x_1 < x_2 \iff m < 1 - m \iff m < \frac{1}{2}$, trebuie considerate trei cazuri:

Cazul 1: $m \in (-\infty, \frac{1}{2})$. Formăm tabloul

x	$-\infty$	m	1 - m	$+\infty$
g(x)	$-\infty$	g(m)	g(1 - m)	$+\infty$

$$g(m) = (1-m)(4m^2 + m + 1), \quad g(1-m) = 4m^3 - 9m^2 + 6m.$$

Deoarece $g(m)$ și $g(1 - m)$ au semne variabile, se impune o discuție după valorile lui m , pentru a preciza șirul lui Rolle. Completăm tabloul de mai sus

x	$-\infty$	m	1 - m	$+\infty$
m \ g(x)	$-\infty$	g(m)	g(1 - m)	$+\infty$
m $\in (-\infty, 0)$	$-\infty$	+	-	$+\infty$
m = 0	$-\infty$	+	0	$+\infty$
m $\in (0, \frac{1}{2})$	$-\infty$	+	+	$+\infty$

și concluzionăm:

- pentru $m \in (-\infty, 0)$, ecuația are trei rădăcini reale;

- pentru $m = 0$, ecuația are trei rădăcini reale, una dublă (egală cu 1);
 - pentru $m \in (0, \frac{1}{2})$, ecuația are o singură rădăcină reală.
- Cazul 2: $m = \frac{1}{2}$. Acum, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$. Formăm tabloul

x	-∞	$\frac{1}{2}$	+∞	
g(x)	-∞	+	+∞	

și concluzionăm: ecuația are o singură rădăcină reală.

Cazul 3: $m \in (\frac{1}{2}, \infty)$. Formăm tabloul

x	-∞	1 - m	m	+∞	
g(x)	-∞	g(1 - m)	g(m)	+∞	

Din nou se impune o discuție după valorile lui m, pentru a preciza șirul lui Rolle.

Completăm tabloul de mai sus

x	-∞	1 - m	m	+∞	
m \ g(x)	-∞	g(1 - m)	g(m)	+∞	
m ∈ ($\frac{1}{2}$, 1)	-∞	+	+	+∞	
m = 1	-∞	+	0	+∞	
m ∈ (1, ∞)	-∞	+	-	+∞	

și concluzionăm:

- pentru $m \in (\frac{1}{2}, 1)$, ecuația are o singură rădăcină reală;
- pentru $m = 1$, ecuația are trei rădăcini reale, una dublă (egală cu = 1);
- pentru $m \in (1, \infty)$, ecuația are trei rădăcini reale. ■

Observații. 1. Șirul lui Rolle este o metodă de aflare a numărului rădăcinilor reale dintr-un interval I ale unei ecuații $f(x) = 0$ în care funcția f este derivabilă. În plus, metoda permite localizarea rădăcinilor în anumite subintervale.

Metoda constă în parcurgerea următoarelor etape:

Etapa 1. Calculul derivatei f' , determinarea rădăcinilor consecutive x_1, x_2, \dots, x_n din intervalul (a,b) ale ecuației $f'(x) = 0$ și trecerea numerelor a, x_1, x_2, \dots, x_n , b pe prima linie a unui tablou;

Etapa 2. Calculul valorilor $f(a+0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... $f(x_n)$, $f(b-0)$ și trecerea lor pe linia a doua a tabloului deschis anterior ($f(a+0)$ sub a , $f(x_1)$ sub x_1 ș.a.m.d.);

Menționăm faptul că șirul semnelor valorilor $f(a+0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... $f(x_n)$, $f(b-0)$ se numește șirul lui Rolle (pentru funcția f și intervalul (a,b)).

Etapa 3. Concluzii: Numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = 0$ din intervalul (a,b) este egal cu numărul variațiilor (schimbărilor) de semn și al zerourilor din șirul lui Rolle (nu se iau în considerare zerourile $f(a+0) = 0$ și $f(b-0) = 0$, dacă au loc aceste egalități). Precizăm că rădăcina corespunzătoare variației de semn $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ se află în intervalul (x_i, x_{i+1}) .

Facem precizarea că justificarea afirmațiilor de mai sus este imediată și se bazează pe o consecință a Teoremei lui Rolle - "Între două zerouri consecutive ale derivatei f' se află cel mult un zero al funcției f ." - și pe Teorema de intersecție a lui Cauchy.

2. Dacă ecuația conține un parametru (sau mai mulți) și rădăcinile derivatei depind de el, se face o discuție după valorile parametrului pentru a se stabili ordinea crescătoare a lor. Apoi, se face o discuție pentru stabilirea semnelor din șirul lui Rolle.

Exemplele de mai sus sunt edificatoare în acest sens.

3. Astfel de probleme se pot rezolva și prin metoda grafică.

Problema 20

Să se arate că $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctg x$, pentru $x \geq 0$;

Rezolvare. Considerăm funcția ajutătoare

$$h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \arctg x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Avem $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$ pentru $x \geq 0$. Aceasta arată că funcția h este crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$. Ca urmare, pentru $x \geq 0$ avem $h(x) \geq h(0)$ adică $\arctg x \geq \frac{x}{1+x^2}$, ceea ce încheie rezolvarea.

Observații. 1. În general, pentru a demonstra că o inegalitate de forma $f(x) \geq g(x)$ este adevărată pentru $x \in I$, se poate proceda astfel:

- se consideră funcția ajutătoare $h : I \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - g(x)$;
- se face un sumar tablou de variație pentru funcția h , din care să rezulte semnul său; Tabloul trebuie să conțină derivata h' și semnul său, monotonia și câteva valori sau limite ale funcției pentru a se putea determina semnul său.
- se trage concluzia: din $h(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, rezultă că $f(x) \geq g(x)$, pentru orice $x \in I$.

În fapt, această metodă este aplicarea practică a următorului rezultat general (și a cărui justificare este imediată):

“Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, cu $-\infty < a < b \leq +\infty$. Dacă f și g sunt funcții derivabile astfel încât $f(a) \geq g(a)$ și $f'(x) \geq g'(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci $f(x) \geq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$ ”

Rezultate asemănătoare au loc și pentru alte tipuri de intervale.

Interpretând geometric acest rezultat, se poate spune că metoda grafică este o altă posibilitate de abordare a problemei.

2. Facem precizarea că uneori este nevoie să transformăm inegalitatea dată în alta echivalentă cu ea și pe aceea să o demonstrăm (vezi b)).

3. Unele inegalități se pot demonstra cu Teorema lui Lagrange (sau cu Teorema lui Cauchy).

Exemplu. Demonstrăm că $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Considerăm funcția ajutătoare $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$, care evident este derivabilă.

Pentru $x > 0$, Teorema lui Lagrange aplicată funcției f pe intervalul $[0, x]$ ne dă $f(x) - f(0) = f'(c)x$, unde $c \in (0, x)$. Deoarece $f'(x) = e^x$ și $f(0) = 0$, avem $f(x) = e^c x > x$.

Am demonstrat că $e^x > x + 1$, $\forall x > 0$.

Analog, pentru $x < 0$, Teorema lui Lagrange aplicată funcției f pe intervalul $[x, 0]$ ne dă $f(0) - f(x) = -f'(d)x$, unde $d \in (x, 0)$. De aici, rezultă că $f(x) = e^d x > x$.

Am demonstrat că $e^x > x + 1$, $\forall x < 0$.

Din cele demonstrate mai sus rezultă imediat că

$$e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R},$$

cu egal dacă și numai dacă $x = 0$.

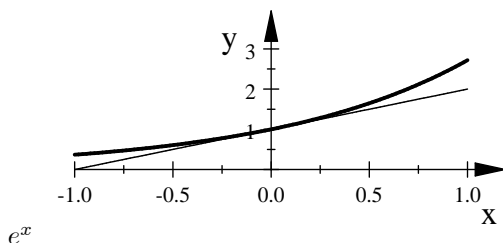
Facem precizarea că această inegalitate este mai tare decât inegalitatea demonstrată la pct. b). Acolo, condiția $x > -1$ este impusă pentru inegalitatea din stânga. De altfel, demonstrația dată acolo

pentru inegalitatea $e^x \geq x + 1$, $x > -1$ se poate adapta imediat pentru a demonstra inegalitatea $e^x \geq x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Încheiem, dând o a treia demonstrație a inegalității anterioare, pentru a pune în evidență o altă metodă de demonstrare a unor inegalități - metoda funcțiilor convexe.

Astfel, funcția exponențială e^x are derivata secundă strict pozitivă pe \mathbb{R} , ceea ce arată că funcția este convexă pe \mathbb{R} . Conform unei proprietăți, graficul exponențialei este situat deasupra oricărei tangente a sa. Tangenta în punctul $(0,1)$ la graficul exponențialei are ecuația $y - 1 = x$, adică $y = x + 1$.

Așadar, are loc inegalitatea $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.



Graficul exponențialei cu tangenta în punctul $(0,1)$

CAPITOLUL 3

Funcții Integrabile

Problema 21

Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} |x| (x - 2)e^{-x}, & \text{dacă } x < 2, \\ \frac{\ln^2(x - 1)}{x - 1}, & \text{dacă } x \geq 2 \end{cases}.$$

a). Să se arate că funcția are primitive pe \mathbb{R} și să se determine aceste primitive.

b). Să se arate că funcția este integrabilă Riemann pe $[-1,3]$ și să se

calculeze $\int_{-1}^3 f(x) dx$.

Rezolvare. a). Avem în vedere faptul că orice funcție continuă pe un interval admite primitive (vezi Definiția 7.2.1) pe acel interval, conform cu Teorema fundamentală a calculului integral (Teorema 7.1.7). De aceea, studiem continuitatea funcției f . Cele două ramuri ale funcției, $f_1(x) = |x|(x-2)e^{-x}$ și $f_2(x) = \frac{\ln^2(x-1)}{x-1}$, sunt continue pe $(-\infty, 2)$ respectiv $(2, \infty)$, fiind compuneri de astfel de funcții (Teorema 4.2.4). Ca urmare, funcția f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Avem apoi $f(2) = 0$ și

$$\lim_{x \nearrow 2} f(x) = \lim_{x \nearrow 2} |x|(x-2)e^{-x} = 0,$$

$$\lim_{x \searrow 2} f(x) = \lim_{x \searrow 2} \frac{\ln^2(x-1)}{x-1} = 0.$$

De aici rezultă că f este continuă în punctul $x = 2$ și deci pe \mathbb{R} .

Din cele spuse mai sus, rezultă că funcția f are primitive pe \mathbb{R} . Pentru a determina aceste primitive, determinăm mai întâi primitivele lui f pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ și $(2, \infty)$.

i). Pe intervalul $(-\infty, 0)$ avem, folosind metoda integrării prin părți (vezi Teorema 7.2.4 și Remarca 7.2.8)

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int f(x) dx = \int -x(x-2)e^{-x} dx = \\ &= \int (x^2 - 2x)(e^{-x})' dx = (x^2 - 2x)e^{-x} - \int (2x - 2)e^{-x} dx = \\ &= (x^2 - 2x)e^{-x} + \int (2x - 2)(e^{-x})' dx = \\ &= (x^2 - 2)e^{-x} - 2 \int e^{-x} dx = x^2 e^{-x} + c; \end{aligned}$$

ii). Pe intervalul $(0, 2)$ avem, folosind aceeași metodă,

$$F_2(x) = \int f(x) dx = \int x(x-2)e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + c;$$

iii). Pe intervalul $(2, \infty)$ avem, folosind prima metodă de schimbare de variabilă (vezi Teorema 7.2.5 și Remarca 7.2.9)

$$F_3(x) = \int f(x)dx = \int \frac{\ln^2(x-1)}{x-1} dx = \\ = \int \ln^2(x-1)(\ln(x-1))' dx = \frac{\ln^3(x-1)}{3} + c.$$

Acestea fiind zise, o primitivă F pe \mathbb{R} a lui f este, cu necesitate,

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x} + c_1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ -x^2 e^{-x} + c_2, & \text{dacă } x \in [0, 2] \\ \frac{\ln^3(x-1)}{3} + c_3, & \text{dacă } x \in (2, \infty) \end{cases}$$

unde constantele c_1, c_2, c_3 se determină din condițiile

j). F este continuă pe \mathbb{R} ,

jj). F este derivabilă pe \mathbb{R} ,

jjj). $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Din felul cum a fost construită, funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ și, în plus, pe această mulțime are loc egalitatea $F'(x) = f(x)$.

Condiția de continuitate a lui F în 0 ne dă $c_1 = c_2$; condiția de continuitate a lui F în 2 ne dă $c_2 - \frac{4}{e^2} = c_3$. Așadar, F este continuă pe \mathbb{R} dacă și numai dacă $c_1 = c_2 = c$ și $c_3 = c - \frac{4}{e^2}$, c fiind o constantă reală ce se va determina.

Cu aceasta, funcția F devine

$$F(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x} + c, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0), \\ -x^2 e^{-x} + c, & \text{dacă } x \in [0, 2], \\ \frac{\ln^3(x-1)}{3} + c - \frac{4}{e^2}, & \text{dacă } x \in (2, \infty) \end{cases}.$$

Din cele spuse până acum, funcția F este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ și $F'(x) = f(x)$ pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Având în vedere o consecință a Teoremei lui Lagrange și continuitatea lui f , obținem

$$F'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0, F'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = 0, \\ F'_s(2) = \lim_{x \nearrow 2} f(x) = 0, F'_d(2) = \lim_{x \searrow 2} f(x) = 0,$$

ceea ce arată că F este derivabilă și în punctele $x = 0$ și $x = 2$ și în aceste puncte se verifică egalitatea $F'(x) = f(x)$, pentru orice $c \in \mathbb{R}$.

Concluzia este una singură: funcția F de mai sus este primitiva generală (integrala nedefinită) a lui f .

b). Având în vedere faptul că orice funcție continuă pe un interval compact este integrabilă Riemann (vezi Teorema 7.1.3 sau Teorema 7.1.5 - Criteriul lui Lebesgue), din cele spuse mai sus rezultă că funcția f este integrabilă

Riemann pe $[-1, 3]$. Pentru a calcula integrala $\int_{-1}^3 f(x) dx$,

folosim formula lui Leibniz - Newton (vezi Teorema 7.1.8). Acestea fiind zise, avem

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = F(3) - F(-1) = \frac{\ln^3 2}{3} - e - \frac{4}{e^2}. \blacksquare$$

Observații. 1. Alte proprietăți ale integralei Riemann și în legătură cu primitivele unei funcții se găsesc în §7.1 respectiv în §7.2.

2. Primitivele unei funcții continue pe un interval se pot determina și cu ajutorul integralei Riemann, aplicând ideea din demonstrația Teoremei 7.1.7: Pentru orice funcție f , continuă pe un interval $I \subset \mathbb{R}$, funcția

$$F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}, F_0(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

$a \in I$ fiind fixat, dar arbitrar de altfel, este primitivă pe I pentru f , anume primitiva care se anulează în punctul a . Mai precizăm că acest rezultat este un caz particular al Teoremei 7.5.3.

Deoarece ramurile funcției f se schimbă în punctele 0 și 2 , este indicat să alegem în rolul lui a un punct situat la stânga lor, de exemplu $a = -2$. Având în vedere Proprietatea de aditivitate a integralei Riemann (vezi Teorema 7.1.6 și Remarca 7.1.3), avem

$$F_0(x) = \int_{-2}^x f(t) dt = \begin{cases} \int_{-2}^x -t(t-2)e^{-t} dt, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0], \\ F(0) + \int_0^x t(t-2)e^{-t} dt, & \text{dacă } x \in (0, 2], \\ F(2) + \int_2^x \frac{\ln^2(t-1)}{t-1} dt, & \text{dacă } x \in (2, \infty) \end{cases} .$$

Pentru calculul celor trei integrale, folosim formula lui Leibniz - Newton, pentru că se cunosc primitivele F_1, F_2, F_3 . Calcule simple ne conduc la

$$F_0(x) = \int_{-2}^x f(t) dt = \begin{cases} x^2 e^{-x} - 4e^2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0], \\ -x^2 e^{-x} - 4e^2, & \text{dacă } x \in (0, 2], \\ \frac{\ln^3(x-1)}{3} - \frac{4}{e^2} - 4e^2, & \text{dacă } x \in (2, \infty) \end{cases} .$$

Adunând la această primitivă a lui f constanta $c + 4e^2$, atunci F_0 devine exact primitiva generală (integrala nedefinită) a lui f determinată mai sus.

Problema 22

Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x^2}, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sqrt{5x^2 + 1}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases} .$$

- Să se arate că funcția are primitive pe fiecare din intervalele $(-\infty, 0]$ și $(0, \infty)$;
- Să se determine primitivele de mai sus;
- Să se arate că funcția nu are primitive pe \mathbb{R} ;
- Să se arate că funcția este integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$;
- Să se calculeze $\int_{-1}^4 f(x) dx$.

Rezolvare. a). Ca și în Problema anterioară, începem prin a studia continuitatea funcției. Cele două ramuri ale sale, $f_1(x) = xe^{-x^2}$ și $f_2(x) = \sqrt{5x^2 + 1}$, sunt continue pe $(-\infty, 0]$ respectiv $(0, \infty)$, fiind compuneri de funcții continue: funcția exponențială, funcția radical și funcții polinomiale (Teorema 4.2.4). Ca urmare, funcția are primitive pe fiecare din aceste intervale.

b). Pe intervalul $(-\infty, 0]$, avem

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int (-x^2)' e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c,$$

conform cu prima metodă de schimbare de variabilă (vezi Teorema 7.2.5 și Remarca 7.2.9).

Pe intervalul $(0, \infty)$, avem, folosind metoda de integrare prin părți (vezi Teorema 7.2.4 și Remarca 7.2.8)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{5x^2 + 1} dx &= \int \frac{5x^2 + 1}{\sqrt{5x^2 + 1}} dx = \int x \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 + 1}} dx + \\ &+ \int \frac{1}{\sqrt{5x^2 + 1}} dx = \int x(\sqrt{5x^2 + 1})' dx + \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{5}}} dx = \\ &= x\sqrt{5x^2 + 1} - \int \sqrt{5x^2 + 1} dx + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{5}} \right), \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} \int \sqrt{5x^2 + 1} dx &= \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{5x^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln (\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 1}) + c. \end{aligned}$$

c). Procedăm ca în problema anterioară. Căutăm o primitivă a funcției f pe \mathbb{R} sub forma

$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c_1, \text{ dacă } x \leq 0 \text{ și}$$

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{5x^2 + 1} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln (\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 1}) + c_2, \text{ dacă } x > 0,$$

Constantele c_1 și c_2 se determină din condițiile:

j). F este continuă pe \mathbb{R} ,

jj). F este derivabilă pe \mathbb{R} ,

jjj). $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Condiția de continuitate a lui F în 0 este $\lim_{x \nearrow 0} F(x) = \lim_{x \searrow 0} F(x) = F(0)$ și ne dă $-\frac{1}{2} + c_1 = c_2$. Așadar, F este continuă pe \mathbb{R} dacă și numai dacă $c_1 = c + \frac{1}{2}$, $c_2 = c$, c fiind o constantă reală ce se va determina.

Acum, calcule simple ne conduc la

$$F'_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 0,$$

$$F'_d(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1,$$

ceea ce arată că funcția F nu este derivabilă în punctul $x = 0$ pentru nici un $c \in \mathbb{R}$.

Concluzia: funcția f nu are primitive pe \mathbb{R} .

d). Fie intervalul compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$. El poate fi în una din situațiile:

i). $a < b \leq 0$ sau $0 < a < b$; funcția f este continuă pe $[a, b]$ și ca urmare, integrabilă, conform cu Teorema 7.1.3.

ii). $0 = a < b$; funcția f este crescătoare pe $[a, b]$ și ca urmare, integrabilă, conform cu Teorema 7.1.4.

iii). $a < 0 < b$; funcția f este integrabilă atât pe intervalul $[a, 0]$ - cazul i) - cât și pe intervalul $[0, b]$ - cazul ii). Conform Proprietății de aditivitate a integralei Riemann (vezi Teorema 7.1.6), rezultă că funcția f este integrabilă Riemann pe intervalul compact $[a, b]$.

Așadar, indiferent de situația în care se află intervalul $[a, b]$, funcția f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

e). Din cele spuse imediat mai sus, funcția f este integrabilă Riemann pe intervalul $[-1, 4]$ și aceeași Teoremă ne permite să scriem egalitatea

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx.$$

Integrala $\int_{-1}^0 f(x)dx$ se poate calcula cu formula lui Leibniz
 - Newton (vezi Teorema 7.1.8):

$$\int_{-1}^0 f(x)dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}.$$

În schimb, integrala $\int_0^4 f(x)dx$ nu se poate calcula în același mod. Pentru a o calcula, procedăm astfel: Considerăm funcția $g : [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = \sqrt{5x^2 + 1}$. Se constată că g este continuă și $f(x) = g(x)$ pentru $x \in (0,4]$. Conform unei Proprietăți a integralei Riemann (vezi cele spuse după Remarca 7.1.3), avem că f este integrabilă Riemann pe $[0,4]$, - ceea ce se știa deja - și, în plus,

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 g(x)dx.$$

Ori, această ultimă integrală se poate calcula cu formula lui Leibniz - Newton (vezi Observația de mai jos).

Așadar,

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x)dx &= \int_0^4 g(x)dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{5x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{5}} \ln(\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 1}) \right] \Big|_0^4 = \\ &= 18 + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln(4\sqrt{5} + 9) \end{aligned}$$

și în concluzie,

$$\int_{-1}^4 f(x)dx = \frac{1}{2e} + \frac{35}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln(4\sqrt{5} + 9). \blacksquare$$

Observații. 1. De reținut:

- monotonia este o condiție suficientă de integrabilitate;

Sensul exact al acestei afirmații trebuie înțeles ca în Teorema 7.1.3.

- existența și valoarea integralei Riemann $\int_a^b f(x)dx$ nu depinde de

valorile funcției f într-un număr finit de puncte din intervalul $[a,b]$.

Sensul exact al acestei afirmații trebuie înțeles ca în Proprietatea 5 a integralei Riemann, enunțată și demonstrată după Remarca 7.1.3.

2. Faptul că funcția nu are primitive pe \mathbb{R} se poate demonstra mai simplu folosind condiția necesară de existență a primitivei unei funcții. Exact vorbind, funcția f nu are proprietatea lui Darboux pe \mathbb{R} pentru că intervalul $[0,1]$ este transformat în

$$f([0,1]) = \{0\} \cup (1, \sqrt{6}],$$

mulțime care nu este interval. Ca urmare, f nu are primitive pe \mathbb{R} (vezi cele spuse în Observația din Problema precedentă).

3. La punctul e), funcția g prelungeste funcția f pe intervalul $[0,4]$ prin continuitate, pentru a se putea aplica formula lui Leibniz - Newton. Ar fi (tot) suficient ca g să aibă primitive.

Problema 23

Să se arate că pentru $\alpha, \beta, \gamma, p, q \in \mathbb{R}, \gamma > 0$, integrala improprie

$$\int_0^{\infty} x(\alpha \sin px + \beta \cos qx)e^{-\gamma x} dx$$

este absolut convergentă și să se calculeze.

Rezolvare. Deoarece pentru $x \geq 0$ avem

$$|x(\alpha \sin px + \beta \cos qx)e^{-\gamma x}| \leq xe^{-\gamma x}(|\alpha| + |\beta|)$$

și integrala improprie $\int_0^{\infty} xe^{-\gamma x} dx$ este convergentă (pen-

tru că, după o integrare prin părți, avem $\int_0^{\infty} xe^{-\gamma x} dx =$

$\left(-\frac{1}{\gamma}x - \frac{1}{\gamma^2}\right)e^{-\gamma x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\gamma^2}$), conform Criteriului de comparație (Teorema 7.4.2), integrala improprie

$$\int_0^{\infty} |x(\alpha \sin px + \beta \cos qx)e^{-\gamma x}| dx$$

este convergentă. Conform cu Definiția 7.4.7, integrala improprie din enunț este absolut convergentă.

Integrala o vom calcula prin părți. Pentru aceasta, determinăm mai întâi o primitivă a funcției $f(x) = (\alpha \sin px + \beta \cos qx)e^{-\gamma x}$. Pentru simplificarea calculelor, calculăm separat prin părți:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int \sin px e^{-\gamma x} dx = \int \sin px \left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}\right)' dx = \\ &= -\frac{1}{\gamma} \sin px e^{-\gamma x} + \frac{p}{\gamma} \int \cos px e^{-\gamma x} dx = -\frac{1}{\gamma} \sin px e^{-\gamma x} + \\ &\quad + \frac{p}{\gamma} \int \cos px \left(-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma x}\right)' dx = -\frac{1}{\gamma} \sin px e^{-\gamma x} + \\ &\quad + \frac{p}{\gamma} \left[-\frac{1}{\gamma} \cos px e^{-\gamma x} - \frac{p}{\gamma} \int \sin px e^{-\gamma x} dx\right] = \\ &= \left[-\frac{1}{\gamma} \sin px - \frac{p}{\gamma^2} \cos px\right] e^{-\gamma x} - \frac{p^2}{\gamma^2} \int \sin px e^{-\gamma x} dx, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$F_1(x) = \int \sin px e^{-\gamma x} dx = -\frac{\gamma \sin px + p \cos px}{\gamma^2 + p^2} e^{-\gamma x} + c.$$

Apoi, integrând o dată prin părți,

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \int \cos px e^{-\gamma x} dx = \frac{\gamma}{p} \left[F_1(x) + \frac{1}{\gamma} \sin px e^{-\gamma x}\right] = \\ &= \frac{p \sin px - \gamma \cos px}{\gamma^2 + p^2} e^{-\gamma x} + c, \end{aligned}$$

pentru a prelua unele din rezultatele obținute mai sus.

Combinând acum cele două rezultate, obținem

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int (\alpha \sin px + \beta \cos qx) e^{-\gamma x} dx = \\
&= \alpha F_1(x) + \beta F_2(x) = \\
&= \left[-\alpha \frac{\gamma \sin px + p \cos px}{\gamma^2 + p^2} + \beta \frac{q \sin qx - \gamma \cos qx}{\gamma^2 + q^2} \right] e^{-\gamma x} + c.
\end{aligned}$$

Acestea fiind zise, trecem la calculul integralei improprie date.

Folosim metoda integrării prin părți într-o astfel de integrală (vezi Teorema 7.4.7):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} x(\alpha \sin px + \beta \cos qx) e^{-\gamma x} dx &= \int_0^{\infty} xF'(x) dx = \\
&= xF(x) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} F(x) dx = xF(x) \Big|_0^{\infty} + \\
&+ \frac{\alpha\gamma}{\gamma^2 + p^2} \int_0^{\infty} \sin px e^{-\gamma x} dx + \frac{\alpha p}{\gamma^2 + p^2} \int_0^{\infty} \cos px e^{-\gamma x} dx - \\
&- \frac{\beta q}{\gamma^2 + q^2} \int_0^{\infty} \sin qx e^{-\gamma x} dx + \frac{\beta\gamma}{\gamma^2 + q^2} \int_0^{\infty} \cos qx e^{-\gamma x} dx.
\end{aligned}$$

Avem, pe de o parte,

$$xF(x) \Big|_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} xF(x) = 0,$$

pentru că $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin px x e^{-\gamma x} = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos px x e^{-\gamma x} = 0$, având în vedere faptul că cele două funcții trigonometrice sunt mărginite pe \mathbb{R} iar $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-\gamma x} = 0$.

Pe de altă parte, ținând cont de Formula lui Leibniz-Newton (Teorema 7.4.6) pentru integrale improprie și cu argumente asemănătoare ca mai sus,

$$\int_0^{\infty} \sin px e^{-\gamma x} dx = - \frac{\gamma \sin px + p \cos px}{\gamma^2 + p^2} e^{-\gamma x} \Big|_0^{\infty} = \frac{p}{\gamma^2 + p^2},$$

$$\int_0^{\infty} \cos px e^{-\gamma x} dx = \frac{p \sin px - \gamma \cos px}{\gamma^2 + p^2} e^{-\gamma x} \Big|_0^{\infty} = \frac{\gamma}{\gamma^2 + p^2}.$$

Obținem în final,

$$\int_0^{\infty} x(\alpha \sin px + \beta \cos qx) e^{-\gamma x} dx = \frac{2\alpha\gamma p}{(\gamma^2 + p^2)^2} + \frac{\beta(\gamma^2 - q^2)}{(\gamma^2 + q^2)^2}. \blacksquare$$

Observație. Teoremele folosite în rezolvarea Problemei se referă la integrale improprii de forma $\int_a^{b-0} f(x) dx$. Adaptate corespunzător, ele sunt valabile și pentru alte tipuri de integrale improprii.

Problema 24

Să se calculeze aria mulțimii

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 48, y^2 \leq 8x, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Rezolvare. Mulțimea M este domeniul compact din plan limitat de porțiunea din primul cadran al cercului de ecuație $x^2 + y^2 = 48$, de porțiunea din primul cadran a parabolei $y^2 = 8x$ și de semiaxa pozitivă $y = 0$:

Pentru a putea aplica formula de calcul a ariei, mai avem nevoie de punctul de intersecție din primul cadran dintre cerc și parabolă. Coordonatele lui se află rezolvând sistemul format de ecuațiile celor două curbe:

$$P : \begin{cases} x^2 + y^2 = 48 \\ y^2 = 8x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 8x - 48 = 0 \\ y^2 = 8x \end{cases}.$$

Rezultă de aici $P(4, 4\sqrt{2})$. Acum, mulțimea M se poate descompune în reuniunea a două subgrafice: M_1 ca subgrafic al funcției $f(x) = \sqrt{8x}$, $x \in [0, 4]$ și M_2 ca subgrafic al funcției $g(x) = \sqrt{48 - x^2}$, $x \in [4, 4\sqrt{3}]$. Cum M_1 și M_2 au în comun doar un segment de dreaptă (care, evident, are aria nulă), putem scrie (vezi mai jos)

$$\begin{aligned} \text{Aria } M &= \text{Aria } M_1 + \text{Aria } M_2 = \\ &= \int_0^4 \sqrt{8x} dx + \int_4^{4\sqrt{3}} \sqrt{48 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Prima integrală se calculează direct:

$$\int_0^4 \sqrt{8x} dx = \sqrt{8} \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{8x^{\frac{3}{2}}} \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \sqrt{2}.$$

A doua integrală se calculează cu schimbarea de variabilă $x = 4\sqrt{3} \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (vezi Teorema 7.1.10):

$$\begin{aligned} \int_4^{4\sqrt{3}} \sqrt{48 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{48 - (4\sqrt{3} \sin t)^2} 4\sqrt{3} \cos t dt = \\ &= 48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= 24 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 12\pi. \end{aligned}$$

În concluzie, $\text{Aria } M = \frac{32}{3} \sqrt{2} + 12\pi = 52,784$. ■

Observație. Legat de calculul ariei unei mulțimi plane, reamintim următoarele:

1. Aria subgraficului

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

al unei funcții $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă și pozitivă, este dată de formula

$$\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Aria intergraficului

$$\Gamma_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

al două funcții $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue și astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$, este dată de formula

$$\text{Aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Dacă condiția “ $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$ ” nu se verifică, atunci intergraficul lui f și g trebuie văzut ca fiind domeniul compact plan limitat de curbele $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$. Aria sa este

$$\text{Aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b |g(x) - f(x)| dx.$$

Problema 25

Să se calculeze aria și volumul corpului de rotație determinat de funcția $f(x) = \sin x$ pe intervalul $[0, \pi]$.

Rezolvare. Volumul corpului este dat de formula (vezi mai jos)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Aria corpului este (vezi mai jos)

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 + u^2} du = \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{1 + u^2}{\sqrt{1 + u^2}} du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 4\pi \left[\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du + \int_0^1 u \left(\sqrt{1+u^2} \right)' du \right] = \\
& = 4\pi \ln \left(u + \sqrt{1+u^2} \right) \Big|_0^1 + 4\pi u \sqrt{1+u^2} \Big|_0^1 - \\
& - 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du = 2\pi [\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}]. \blacksquare
\end{aligned}$$

Observație. În legătură cu calculul ariei și volumului unui corp de rotație, reamintim următoarele:

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă și pozitivă. Prin rotirea subgraficului Γ_f al lui f în jurul axei Ox se obține un corp și o suprafață, notate C_f și S_f și numite corpul de rotație determinat de f respectiv suprafața de rotație determinată de f .

1. Corpul C_f are volum, dat de formula

$$\text{Vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Facem precizarea că formula rămâne adevărată și pentru funcții care nu sunt neapărat pozitive.

2. Dacă, în plus, funcția f este derivabilă și cu derivata f' continuă, suprafața S_f are arie, dată de formula

$$\text{Aria}(S_f) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Facem două precizări. Prima: dacă f nu este pozitivă, formula rămâne

$$\text{adevărată prin } \text{Aria}(S_f) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

A doua, este aceea că această arie trebuie văzută ca aria laterală a corpului C_f (asemuit cu un trunchi de con). Aria totală a corpului este $A_t = \text{Aria}(S_f) + \pi (f^2(a) + f^2(b))$.

Problema 26

1. Să se calculeze lungimea graficului funcției

$$f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \cos x,$$

unde $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ este dat.

Rezolvare. Lungimea graficului funcției f este (vezi mai jos)

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \int_{-a}^a \sqrt{1 + (\ln \cos x)'^2} dx = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} dx = \\ &= \int_{-a}^a \frac{1}{\cos x} dx = 2 \int_0^a \frac{1}{\cos x} dx = 2 \int_0^a \frac{(\sin x)'}{\cos^2 x} dx = \\ &= 2 \int_0^a \frac{(\sin x)'}{1 - \sin^2 x} dx = 2 \int_0^{\sin a} \frac{1}{1 - u^2} du = \ln \frac{1+u}{1-u} \Big|_0^{\sin a} \\ &= \ln \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}. \blacksquare \end{aligned}$$

Observație. Reamintim că dacă funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și cu derivata f' continuă, atunci graficul său are lungime finită și

lungimea sa $\ell(f)$ este dată de formula $\ell(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Problema 27

Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \sin x \leq y \leq \cos x\}$.

Rezolvare. 1. Conform cu formulele de mai jos, calculăm

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\cos x - \sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\sin x + \cos x)' dx =$$

$$= [x(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2} - 1;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ca urmare, coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene date sunt

$$x_G = \frac{\frac{\pi}{4}\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\pi\sqrt{2}-4}{4(\sqrt{2}-1)} = 0,2673034,$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{4(\sqrt{2}-1)} = 0,6035533. \blacksquare$$

Observație. În legătură cu centrul de greutate al unei plăci plane, reamintim următoarele:

Fie \mathcal{P} o placă materială plană și omogenă, de grosime neglijabilă, de forma intergraficului $\Gamma_{f,g}$ al funcțiilor $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue și astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$.

1. Coordonatele centrului de greutate G al plăcii sunt

$$x_G = \frac{\int_a^b x(g(x) - f(x))dx}{\int_a^b (g(x) - f(x))dx}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b (g^2(x) - f^2(x))dx}{\int_a^b (g(x) - f(x))dx}.$$

2. În cazul particular $f = 0$ și $g(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, atunci

$$x_G = \frac{\int_a^b xg(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b g^2(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

Problema 28

O picătură de apă având masa inițială M cade sub acțiunea greutății sale și se evaporă uniform, pierzând prin aceasta în fiecare secundă o masă m . Să se găsească lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a picăturii, din momentul începerii căderii sale până în momentul evaporării totale. Se neglijează rezistența aerului.

Rezolvare. În fiecare moment de timp t ulterior începerii căderii, masa picăturii este $M - mt$. Căderea durează până în momentul evaporării totale, adică până când $M - mt = 0$. Deci, căderea durează $t_0 = \frac{M}{m}$ secunde. Spațiul parcurs în acest timp de picătură este $x_0 = \frac{gt_0^2}{2} = \frac{M^2g}{2m^2}$ metri. Așadar, picătura de apă se deplasează sub acțiunea forței sale de greutate $G(x) = \left(M - m\sqrt{\frac{2x}{g}}\right)g$ pe porțiunea $[0, x_0]$. Deci, lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a picăturii, din momentul începerii căderii sale până în momentul evaporării totale este dat de

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{x_0} G(x)dx = \int_0^{x_0} \left(M - m\sqrt{\frac{2x}{g}}\right)gdx = \\ &= g \left[Mx - m\sqrt{\frac{2}{g}} \frac{2}{3}x\sqrt{x} \right] \Big|_0^{x_0} = \frac{M^3g^2}{6m^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Observație. Legat de lucrul mecanic efectuat de o forță, reamintim următoarele:

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Vedem funcția f ca o forță care acționează în sensul axei Ox , având în fiecare punct $x \in I$ mărimea $f(x)$. Lucrul mecanic efectuat de forța f pentru deplasarea unei particule din punctul $a \in I$ în punctul $b \in I$ este, prin

definiție, numărul real $L = \int_a^b f(x)dx$.