Rotaru Petre

FIZICĂ

Notițe de curs - Anul I

AN UNIVERSITAR 2013-2014

CAPITOLUL 1
MECANICĂ

Experiența noastră zilnică conduce inevitabil la ideea că modul de mişcare a unui corp este rezultatul *interacțiunilor* acestuia cu alte corpuri. Lovirea unei mingi de către un jucător şi lovirea acesteia de un perete, sunt exemple de interacțiuni care modifică starea de mişcare a corpului. Oprirea după un timp a unui corp, care este aruncat orizontal pe o suprafață plană, este rezultatul frecării corpului de suprafață. Mişcarea unui electron în jurul nucleului, în atom, se datoreşte interacțiunilor sale cu nucleul şi cu ceilalți electroni. Interacțiunile sunt descrise în mod convenabil prin noțiunea de *forță.* Scopul dinamicii este, în esență, stabilirea relației care există între forța care acționează şi variațiile mişcării corpului asupra căruia acționează.

1.1 LEGILE (PRINCIPIILE) DINAMICII

Principiile mecanicii clasice (ale dinamicii), au fost formulate de Isaac Newton în lucrarea sa „*Philosophiae naturalis principia mathematica* ” („Principiile matematice ale filosofiei naturale”) apărută în 1687. Ele sintetizează rezultatele, acumulate într-o perioadă istorică îndelungată, ale unor experiențe mecanice simple, precum şi unele rezultate astronomice, pe baza unor modele elementare, referitoare la spațiu, timp, interacțiune. Primele trei legi fundamentale ale dinamicii au fost formulate de Newton, cea de a patra reprezintă o completare ulterioară, firească a legilor dinamicii.

Legea întâi a dinamicii (principiul inerției): *orice corp îşi păstrează starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă atât timp cât este liber (adică asupra sa nu acționează forțe exterioare).*

Principiul inerției nu poate fi verificat experimental, deoarece nici un corp nu poate fi eliberat de acțiunea altor corpuri, cum ar fi, de exemplu, atracția gravitațională a Pământului. Principiul inerției se verifică însă prin consecințele sale.

Experiența mai arată, că la toate acțiunile exterioare care încearcă să modifice starea sa de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, corpul se opune, uneori chiar puternic. Proprietatea corpurilor de a se opune oricăror acțiuni exterioare care caută să-i schimbe starea, se numeşte *inerție.* În mecanică, măsura inerției se mai numeşte şi *masă inerțială.*

Conform principiului inerției, corpurile sunt inerte în sensul că nu îşi pot schimba prin mijloace proprii starea de repaus sau de mişcare rectilinie uniformă, ci starea de mişcare se autoîntreține (nu necesită nici o acțiune exterioară pentru menținerea ei). Mişcarea rectilinie şi uniformă se numeşte *mişcare inerţială.* Orice acţiune exterioară perturbă mişcarea inerţială, modificând viteza sau curbând traiectoria, adică produce *mişcarea accelerată* a corpului.

Legea a doua a dinamicii (principiul fundamental). *Noţiunea de forţă*

Noţiunea de forţă este deseori legată de senzaţia de efort, care se depune (când se ridică o greutate, când se trage sau se împinge un corp pe o suprafaţă etc). Pe lângă mărimea efortului (*modul*), se pot preciza *direcţia* şi *sensul* în care se îndreaptă efortul, precum şi *punctul în care se aplică efortul.* Având caracteristicile enumerate, forţa este un *vector.*

Forţele produc *efecte statice* (de echilibrare a altor forţe sau de deformare a corpurilor) şi *efecte dinamice* (de modificare a vitezei corpurilor).

Pentru definirea matematică completă a forţei, este necesar să se introducă mărimea fizică numită *impuls* sau *cantitate de mişcare,* care este egală cu produsul dintre masa şi viteza corpului:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1.1}$$

Impulsul este o mărime vectorială, care are aceeaşi direcţie şi acelaşi sens ca şi viteza. Impulsul este o noţiune fizică foarte importantă, fiindcă ea conţine cele două elemente care caracterizează starea dinamică a unui corp: masa sa şi viteza sa, şi în acest fel devine o mărime dinamică mai bogată în informaţie decât viteza. De exemplu, un camion încărcat, aflat în mişcare, este mai dificil de oprit sau de accelerat decât un camion gol, având aceeaşi viteză, deoarece *cantitatea de mişcare* a camionului încărcat este mai mare decât a camionului neîncărcat.

Folosind noţiunea de impuls se poate da şi un alt enunţ principiului inerţiei: *impulsul unui corp care se deplasează liber, este constant.*

Forţa care acţionează asupra unui corp, şi care este rezultatul interacţiunii acestuia cu alte corpuri (în general cu mediul exterior) un anumit timp, este cauza variaţiei impulsului corpului. Definiţia matematică a forţei:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \;, \tag{1.2}$$

care arată că se numeşte *forţă care acţionează asupra unui corp, derivata în raport cu timpul, a impulsului corpului* poate fi considerată enunţul legii a doua a dinamicii.

Legea a doua a mecanicii, scrisă sub forma (1.2), este valabilă şi în mecanica relativistă, când masa este variabilă (se va vedea mai târziu); mecanica clasică (newtoniană), consideră însă masa constantă, independentă de starea de mişcare a corpului. În cazul masei constante:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{1.3}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{1.4}$$

adică, forța care acționează asupra unui corp determină accelerarea corpului, proporțională cu mărimea forței.

Legea a treia a dinamicii (principiul acțiunii şi reacțiunii): *dacă un corp punctiform acționează asupra altuia cu o forță* $\vec{F}_{12}$ *(forța de acțiune), atunci al doilea corp acționează asupra primului cu o forță,* $\vec{F}_{21}$ *(forța de reacțiune), având acelaşi modul, aceeaşi direcție, dar sens opus.*

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \qquad \text{sau} \qquad \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \tag{1.5}$$

În legătură cu legea discutată trebuie făcute unele precizări:

1) alegerea denumirilor de acțiune pentru una dintre forțe şi de reacțiune pentru cealaltă forță este complet arbitrară, existând posibilitatea inversării rolurilor forțelor;
2) acțiunea şi reacțiunea se exercită asupra unor corpuri diferite;
3) legea a treia a dinamicii se aplică atât la contactul direct între corpuri, cât şi în acțiunile la distanță;
4) relația (1.5) nu trebuie considerată ca o lege de compunere a forțelor (de obicei acestea au puncte de aplicație diferite).

Legea a patra a dinamicii (principiul independenței acțiunii forțelor): *când asupra unui corp punctiform acționează simultan mai multe forțe, fiecare dintre acestea va imprima corpului o accelerație* (conform legii a doua a lui Newton), *independent de acțiunea celorlate forțe.*

$$\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$$
$$\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$$
....
$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n$$

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\sum_{i=1}^{n}\vec{a}_i \tag{1.6}$$

Dar, conform principiului independenței acțiunii forțelor, accelerația corpului este:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F} = m\vec{a} \tag{1.8}$$

adică, accelerația corpului este efectul acțiunii rezultantei tuturor forțelor (principiul al doilea al dinamicii în cazul acțiunii simultane a mai multor forțe).

1.2 LUCRUL MECANIC. PUTEREA MECANICĂ

Se consideră un punct material A, care se deplasează pe o curbă C sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$ (fig 1.1). Într-un timp foarte scurt, deplasarea sa din A în A' este $\overrightarrow{AA'} = d\vec{r}$. Se definește *lucrul mecanic al forței* $\vec{F}$, care produce deplasarea $d\vec{r}$ a punctului material, ca produsul scalar

$$dL = \vec{F}d\vec{r} = Fdr\cos\theta \tag{1.9}$$

unde θ este unghiul pe care îl face direcția forței $\vec{F}$ cu deplasarea elementară $d\vec{r}$. Cum $F\cos\theta$ este componenta F_T a forței, pe direcția tangentă la traiectorie, atunci:

$$dL = F_T dr \tag{1.10}$$

care înseamnă că *lucrul mecanic este egal cu produsul dintre proiecția forței pe direcția de deplasare și mărimea deplasării.* Dacă o forță este perpendiculară pe deplasare $(\theta = 90^o)$, lucrul mecanic efectuat de această forță este nul.

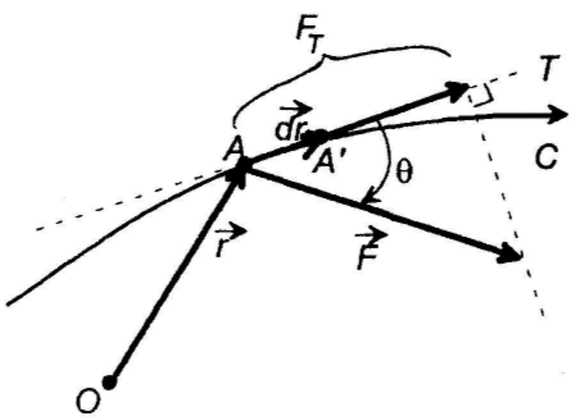


Fig 1.1 - Forța F, produce deplasarea dr a punctului material

Lucrul mecanic total efectuat pentru deplasarea punctului material de la A la B (fig 1.2), este suma tuturor lucrurilor mecanice elementare efectuate în timpul deplasărilor infinitesimale succesive.

Adică,

$$L = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 + \vec{F}_3 d\vec{r}_3 + ... \tag{1.11}$$

sau

$$L = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B F_T dr \tag{1.12}$$

Pentru a calcula integrala din (1.12) trebuie cunoscută dependența forței $\vec{F}$, de coordonatele x, y şi z.

Uneori este important să se cunoască şi viteza cu care se efectuează lucrul mecanic. *Puterea instantanee* se defineşte ca lucrul mecanic, pe unitatea de timp, într-un interval de timp *dt,* foarte scurt:

$$P = \frac{dL}{dt} \tag{1.13}$$

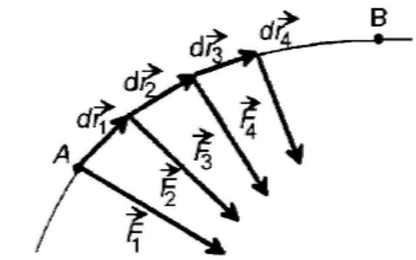


Fig. 1.2. Lucrul mecanic total este suma numeroaselor lucruri mecanice elementare efectuate de forță, între A şi B

Folosind relațiile (1.9) şi (1.13), se poate scrie:

$$P = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v} \tag{1.14}$$

Puterea medie se obține prin împărțirea lucrului mecanic total, obținut cu relația (1.12), la intervalul de timp cât durează acțiunea forței

$$P_m = \frac{L}{t} \tag{1.15}$$

Noțiunea de putere are mare importanță practică, căci pentru un dispozitiv (mecanic sau de altă natură), care efectuează lucru mecanic, contează foarte mult viteza cu care el poate efectua lucrul mecanic.

1.3 FORȚE CONSERVATIVE. ENERGIE POTENȚIALĂ

Uneori, la interacțiunea dintre sistemele fizice, se manifestă forțe, al căror lucru mecanic, la o deplasare pe un contur închis oarecare Γ , este zero, adică:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r} = 0 \tag{1.16}$$

Acestea se numesc *forțe conservative,* dacă forța nu depinde de viteza corpului asupra căruia acționează.

Se pot evidenția şi alte aspecte referitoare la noțiunea discutată.

Descompunând conturul închis Γ în două porțiuni (1A2) şi (2B1), (Fig. 1.3), definiția (1.16) devine:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r} = \int_{1(A)}^{2} \vec{F} d\vec{r} + \int_{2(B)}^{1} \vec{F} d\vec{r} = 0 \tag{1.17}$$

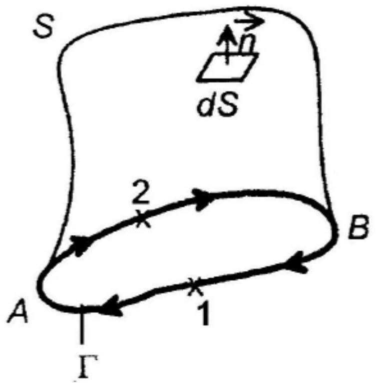


Fig. 1.3 Curba Γ *şi suprafața S pe care se integrează*

De unde rezultă:

$$L_{12} = \int_{1(A)}^{2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{1(B)}^{2} \vec{F} d\vec{r} \tag{1.18}$$

adică, lucrul mecanic al forței conservative, la deplasarea de la 1 la 2 este acelaşi indiferent dacă drumul trece prin A sau prin B. Se mai poate spune că *forțele conservative* sunt acelea pentru care lucrul mecanic între două poziții nu depinde de forma drumului parcurs.

Transformând, cu teorema lui Stokes integrala de linie în integrală de suprafață, relația (1.16) devine:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{S} \left(\nabla \times \vec{F}\right) d\vec{S} = \iint_{S} \left(\nabla \times \vec{F}\right) \vec{n} dS = 0 \tag{1.19}$$

Deoarece suprafața S care se sprijină pe conturul Γ (fig. 1.3), este arbitrară, din (1.19) rezultă:

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \tag{1.20}$$

Se ştie din analiza vectorială, că vectorii al căror rotor este zero se pot scrie ca gradienți ai unor câmpuri scalare:

$$\vec{F} = \nabla U \qquad (1.21)$$

Derivatele în raport cu coordonatele, ale funcției U(x, y, z), numită *funcție de forță,* reprezintă proiecțiile pe axele de coordonate ale forței conservative:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (1.22)$$

Lucrul mecanic elementar al unei forțe conservative se poate exprima şi cu ajutorul funcției de forță:

$$dL = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU \qquad (1.23)$$

$$L_{12} = \int_1^2 dU = U(2) - U(1) \qquad (1.24)$$

adică, lucrul mecanic al forței conservative, independent de drumul parcurs, depinde doar de valorile funcției de forță, în pozițiile inițială (1) şi finală (2).

Un câmp vectorial care satisface o relație de forma (1.16) se numeşte *câmp potențial,* astfel că şi câmpul forțelor conservative este un câmp potențial. Mărimea fizică scalară V (x, y, z), egală ca valoare numerică cu funcția de forță, dar cu semn contrar:

$$V(x, y, z) = - U(x, y, z) \qquad (1.25)$$

constituie *energia potențială* a punctului material. Atunci:

$$\vec{F} = -\nabla V(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial \vec{}} \qquad (1.26)$$

Exemple de câmpuri vectoriale potențiale, derivate din energii potențiale sunt: forțele gravitaționale, forțele elastice, forțele electrice şi altele.

1.4 FORȚE NECONSERVATIVE

Forțele care depind de viteza corpului asupra căruia acționează sau care nu satisfac relațiile (1.16) sau (1.18), adică forțele al căror lucru mecanic pe un contur închis este nenul sau al căror lucru mecanic între două poziții depinde de forma drumului parcurs, se numesc *forțe neconservative.*

Dintre forțele neconservative se remarcă *forțele disipative,* cum sunt *forțele de frecare* care se manifestă întotdeauna când un corp alunecă pe suprafața altui corp, precum şi *forțele de rezistență* la care sunt supuse toate corpurile care se deplasează prin mediu lichid sau gazos (forțele de rezistență sunt de fapt forțe de frecare). Forțele disipative depind nu numai de configurația corpurilor, ci şi de *vitezele lor relative,* fiind întotdeauna orientate în sens opus vitezei mobilului (în raport cu suprafața pe care alunecă sau în raport cu mediul care îi opune rezistență la mişcare). Ținând seama de orientările vectorilor forță şi deplasare, lucrul mecanic al forțelor disipative este întotdeauna negativ.

Există şi un alt tip de forțe neconservative. Acestea sunt *forțele giroscopice,* care depinde de viteza punctului material şi acționează pe o direcție perpendiculară pe această viteză. Lucrul mecanic al forțelor giroscopice este nul oricare ar fi deplasarea punctului material, şi cu atât mai mult mişcarea pe o traiectorie închisă. Singura forță giroscopică cunoscută în fizică este forța Lorentz, care acționează asupra unei particule, încărcată cu sarcină electrică, şi plasată într-un câmp magnetic. Forța Lorentz este proporțională cu produsul vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$, fiind deci perpendiculară pe direcția vitezei $\vec{v}$, precum şi pe cea a inducției magnetice $\vec{B}$. În mecanică *forțele Coriolis* ar putea fi forțe giroscopice. Dar în mecanica newtoniană, aceste forțe nu sunt „forțe adevărate”, fiindcă studiul mişcărilor în raport cu sistemele de referință inerțiale nu permite identificarea acestor „forțe”. Ele sunt introduse în mod artificial la studiul mişcărilor în sisteme de referință aflate în rotație față de sistemele de referință inerțiale, pentru a conferi ecuațiilor de mişcare din aceste sisteme aceeaşi formă cu aceea stabilită în cazul sistemelor de referință inerțiale.

1.5 LEGI DE CONSERVARE ÎN MECANICA PUNCTULUI MATERIAL ŞI A SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE

Stabilirea comportării dinamice a unuia sau a mai multor puncte materiale necesită rezolvarea unui număr de ecuații de mişcare vectoriale, de tipul (1.2), egal cu numărul punctelor materiale. Numărul ecuațiilor scalare este de trei ori mai mare, corespunzător proiecției ecuațiilor vectoriale pe cele trei axe de coordonate.

Pentru un sistem cu N puncte materiale, rezolvarea ecuațiilor de mişcare presupune prezicerea pentru momentul inițial t_0, a 6N condiții inițiale: 3N poziții inițiale $\vec{r}_{i0}$ şi 3N viteze inițiale $\vec{v}_{i0}$, ale punctelor materiale. Rezolvarea sistemului de ecuații este, în principiu, posibilă, cu toate că numărul ecuațiilor este foarte mare, dar în practică se dovedeşte că apar dificultăți matematice deosebite.

Un mod mai comod, dar foarte eficient de abordare a comportării sistemului, foloseşte proprietatea unor mărimi fizice de a rămâne constante pe parcursul evoluției sistemului (în timp).

Asemenea mărimi se numesc *integrale prime ale mişcării*, iar proprietatea de a rămâne constante se exprimă prin *legi de conservare.*

1.5.1 Legea conservării impulsului

Un punct material, asupra căruia acționează o forță, se comportă conform legii a doua a lui Newton. Dacă $\vec{F}=0$, din (1.2) se obține *legea conservării impulsului punctului material:* $\vec{p}=\overrightarrow{const}$.

Legea conservării impulsului are caracter vectorial: chiar dacă numai o componentă carteziană a forței este zero, $F_a=0$ (a = x, y, z), componenta corespunzatoare a impulsului $p_a=const.$ Din conservarea impulsului (când masa punctului material este constantă), rezultă şi conservarea vitezei, $\vec{v}=\overrightarrow{const.}$, în concordanță cu principiul inerției.

Pentru un sistem de N puncte materiale cu masele m_i *şi razele vectoare* $\vec{r}_i$, $i=\overline{1,N}$, se pot scrie ecuații de mişcare de forma (1.2), corespunzând fiecărui punct material:

$$\vec{p}_i=m_i\cdot\vec{v}_i=m_i\cdot\dot{\vec{r}}_i\ ;\qquad \frac{d\vec{p}_i}{dt}=\vec{F}_i \tag{1.27}$$

Forța $\vec{F}_i$ este rezultanta forțelor care acționează asupra punctului *i*:

$$\vec{F}_i=\vec{F}_i^{(e)}+\sum_{j=1}^{N}\overrightarrow{F_{ji}} \tag{1.28}$$

în care, $\vec{F}_i^{(e)}$ este rezultanta *forțelor externe* (datorate exteriorului sistemului), iar $\sum_{j=1}^{N}\overrightarrow{F_{ji}}$ este rezultanta *forțelor interne* (datorate interiorului sistemului) care acționează asupra punctului *i.* $\vec{F}_{ji}$ este forța cu care punctul *j* din sistem, acționează asupra punctului *i.* Evident, $\vec{F}_{ii}=0$. Când forțele $\vec{F}_{ji}$ sunt de natură gravitațională (atracție între mase), pe baza legii a treia a dinamicii:

$$\vec{F}_{ji}+\vec{F}_{ij}=0 \tag{1.29}$$

şi astfel:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{F}_{ji}+\vec{F}_{ij}\right)=0 \tag{1.30}$$

Cu (1.28) şi (1.27) devine:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\vec{F}_i^{(e)}+\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}\ ,\qquad i=\overline{1,N} \tag{1.31}$$

Însumând relațiile (1.31), pentru toate punctele materiale ale sistemului:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(e)}+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} \tag{1.32}$$

Folosind (1.30) şi cu notațiile $\vec{P}=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i$ şi $\vec{F}^{(e)}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(e)}$, din (1.32), se obține:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{F}^{(e)}, \tag{1.33}$$

adică, derivata (variația) în raport cu timpul a impulsului total al sistemului de puncte materiale $\vec{P}$, este egală cu rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra tuturor punctelor materiale ale sistemului. Dacă $\vec{F}^{(e)}=0$, atunci :

$$\vec{P}=\overrightarrow{const}\,. \tag{1.34}$$

Legea conservării impulsului se formulează astfel: impulsul unui sistem de puncte material rămâne constant, când rezultanta forțelor exterioare este nulă.

Se defineşte *centrul de masă* (sau *centrul de inerție*) al sistemului de puncte materiale, punctul geometric având vectorul de poziție:

$$\vec{R}=\frac{\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N}m_i}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i \tag{1.35}$$

în care, M este masa totală a sistemului. Când masele punctelor materiale sunt constante, viteza centrului de inerție va fi:

$$\vec{V}=\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i=\frac{1}{M}\vec{P} \tag{1.36}$$

Cu (1.36), ecuația de mişcare (1.33) devine:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(M\vec{V}\right)=M\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}^{(e)} \tag{1.37}$$

care arată că centrul de inerție al sistemelor izolate de puncte materiale $\left(\vec{F}^{(e)}=0\right)$, se deplasează rectiliniu şi uniform, adică $\vec{V}=\overrightarrow{const}$.

1.5.2 Legea conservării momentului cinetic

Se numeşte *moment cinetic,* $\vec{L}$*,* al unui punct material, în raport cu un punct fix O (fig. 1.4), produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului material față de O şi impulsul punctului material ($\vec{L}$ se mai numeşte şi moment al impulsului):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{1.38}$$

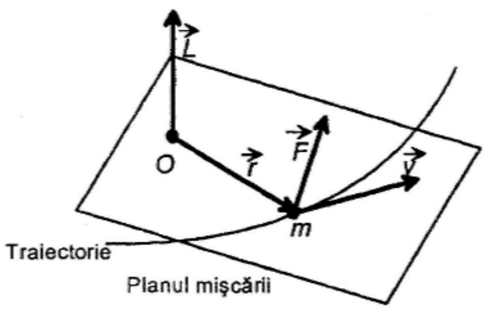


Fig. 1.4 Momentul cinetic al unei particule, față de punctul fix O

Dacă asupra punctului material acționează forța $\vec{F}$ (fig. 1.4) atunci:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{R} \times \vec{F} \tag{1.39}$$

se numeşte *momentul forței* în raport cu punctul O. Se derivează (1.38) în raport cu timpul:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{1.40}$$

Fiindcă $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} = 0$, iar $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\mathcal{M}} \tag{1.41}$$

Când $\vec{\mathcal{M}} = 0$, din (1.41) rezultă conservarea momentului cinetic,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \overrightarrow{const.} \tag{1.42}$$

Din conservarea momentului cinetic (1.42), se obține că traiectoria punctului material este o curbă plană (fig. 1.4). Argumentația este următoarea: $\vec{L}$ fiind constant, planul perpendicular pe $\vec{L}$ (şi determinat de $\vec{\ }$ şi $\vec{p}$) este constant.

Şi (1.42) are caracter vectorial: anularea unei componente a momentului forței, implică conservarea componentei corespunzătoare a momentului cinetic.

Anularea momentului forței se poate datora fie anulării forței, fie paralelismului sau antiparalelismului dintre $\vec{F}$ şi $\vec{\ }$. În acest caz forța este de forma :

$$\vec{F} = \pm\left|\vec{F}\right| \cdot \frac{\vec{r}}{r} \tag{1.43}$$

şi se numeşte *forță centrală* (repulsivă pentru semnul + şi atractivă pentru semnul -).

Trecând la un sistem de N puncte materiale, pentru fiecare punct se poate scrie momentul său cinetic, similar definiției (1.38), iar momentul cinetic total al sistemului de puncte materiale, este suma momentelor cinetice individuale:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i \tag{1.44}$$

Se înmulțeşte ecuația (1.31), vectorial, din stânga, cu $\vec{r}_i$ şi se însumează pentru toate valorile lui *i:*

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} \tag{1.45}$$

Se notează cu $\vec{\mathcal{M}}^{(e)}$, momentul total al forțelor externe:

$$\vec{\mathcal{M}}^{(e)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathcal{M}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \tag{1.46}$$

Se va arăta că al doilea termen din (1.45) este zero. Folosind legea a treia a dinamicii şi cu notațiile din fig. 1.5, suma dublă din (1.45) devine:

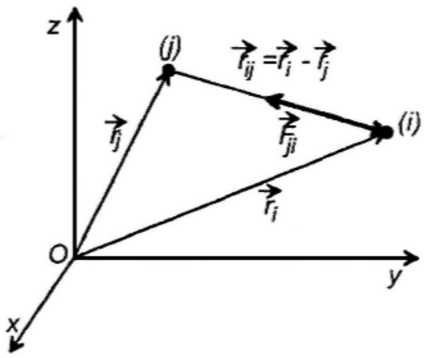


Fig. 1.5 Reprezentarea poziției reciproce a două puncte ale sistemului şi a forței lor de interacțiune

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ji} = 0 \tag{1.47}$$

Rezultatul produsului vectorial anterior este zero, deoarece atât vectorul $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, cât şi vectorul forţă $\vec{F}_{ji}$ au ca suport dreapta care trece prin punctele i şi j. Folosind (1.46), (1.47) şi acelaşi mod de tratare ca la stabilirea relaţiei (1.41), din (1.45) se obţine:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{\mathcal{M}}^{(e)} \tag{1.48}$$

Relaţia (1.48), specifică mişcării de rotaţie, este similară relaţiei (1.33), specifică mişcării de translaţie. Locul impulsului total este luat de momentul cinetic total, iar locul rezultantei forţelor externe îl ia momentul rezultant al forţelor externe.

Dacă în (1.48), $\vec{\mathcal{M}}^{(e)} = 0$, momentul cinetic total se conservă, adică:

$$\vec{L} = \overrightarrow{const.} \tag{1.49}$$

Trebuie accentuat că legile de conservare ale impulsului şi momentului cinetic sunt valabile doar dacă forţele interne, din sistemul de puncte materiale, satisfac principiul acţiunii şi reacţiunii.

1.5.3 Legea conservării energiei mecanice

Lucrul mecanic efectuat de o forţă, pentru deplasarea unui punct material între două poziţii 1 şi 2, se calculează prin integrarea lucrului mecanic elementar (1.9)

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} \tag{1.50}$$

Introducând (1.2), şi presupunând masa punctului material constantă:

$$L_{12} = \int_1^2 \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} = \int_1^2 m d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_1^2 m\vec{v} d\vec{v} = \frac{m}{2}\vec{v}^2 \Big|_1^2 = T \Big|_1^2 = T_2 - T_1 \tag{1.51}$$

Mărimea notată:

$$T = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 \tag{1.52}$$

se *numeşte energie cinetică* a punctului material. Rezultatul (1.51), constituie *teorema variaţiei energiei cinetice* care afirmă că: *variaţia energiei cinetice a unui punct material, asupra căruia acţionează o forţă, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forţă la deplasarea punctului material de la poziţia iniţială la poziţia finală.*

Acelaşi lucru mecanic se poate calcula şi în ipoteza că forţa care acţionează asupra punctului material este conservativă, când se poate scrie (1.26):

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -\int_1^2 \nabla V d\vec{r} = -\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} d\vec{r} = -\int_1^2 dV = -V\Big|_1^2 = V_1 - V_2 \qquad (1.53)$$

Astfel, lucrul mecanic se regăseşte în variația energiei potențiale a punctului material. Egalând (1.51) cu (1.53),

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \ ; \qquad E_1 = E_2 \qquad (1.54)$$

Mărimea fizică:

$$E = T+V \qquad (1.55)$$

se numeşte *energie mecanică.* Cum stările 1 şi 2 sunt oarecare, rezultă că (1.55) este valabilă în general, adică:

$$E = T+V=\text{const.} \qquad (1.56)$$

adică dacă forța care acționează este conservativă, energia mecanică se conservă.

Se va generaliza legea conservării energiei mecanice pentru un sistem de N puncte materiale.

Sistemul de puncte materiale evoluează de la starea inițială 1, la starea finală 2, sub acțiunea forțelor, care efectuează lucrul mecanic:

$$L_{12} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \vec{F}_i d\vec{r}_i \qquad (1.57)$$

în care forțele $\vec{F}_i$ au forma (1.28). Folosind (1.31) şi considerând masele punctelor materiale, constante:

$$L_{12} = \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 \frac{d\vec{p}_i}{dt} d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \int_1^2 \vec{v}_i d\vec{v}_i = T_2 - T_1 \qquad (1.58)$$

unde:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad \text{sau} \quad T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} \qquad (1.59)$$

este energia cinetică totală a sistemului de puncte materiale.

Ținând cont de caracterul conservativ al forțelor din (1.31), acestea au forma:

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\nabla_i V_i^{(e)}(\vec{r}_i) = -\frac{\partial V_i^{(e)}}{\partial \vec{r}_i} \qquad (1.60)$$

$$\vec{F}_{ji} = -\nabla_i V_{ji}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = -\frac{\partial V_{ji}}{\partial \vec{r}_i} \qquad (1.61)$$

în care, $V_i^{(e)}$ este energia potențială de interacțiune a particulei i cu mediul exterior sistemului, iar V_{ji} este energia potențială de interacțiune a particulei i cu particula j. Din V_{ji} se consideră că doar jumătate aparține particulei i, cealaltă jumătate aparținând particulei j. Evident că $V_{ji} = V_{ij}$. Operatorul ∇_i este operatorul nabla în raport cu $\vec{r}_i$, în relațiile (1.60) şi (1.61) cu rol de gradient. Cu (1.60) şi (1.61), expresia lucrului mecanic (1.57) devine:

$$L_{12} = -\sum_{i=1}^{N}\int_{1}^{2}\left[\frac{\partial V_i^{(e)}}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial V_{ji}}{\partial \vec{r}_i}\right]d\vec{r}_i = V_1 - V_2 \tag{1.62}$$

unde :

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i^{(e)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} V_{ji} \tag{1.63}$$

V, a cărei expresie este (1.63), este energia potențială totală a sistemului de puncte materiale, compusă din două părți:

- energia potențială a forțelor externe,

$$V^{(e)} = \sum_{i=1}^{N} V_i^{(e)} \tag{1.64}$$

- energia potențială a forțelor interne,

$$V^{(i)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} V_{ji} \tag{1.65}$$

Factorul $\frac{1}{2}$ apare deoarece fiecare pereche de indici apare de două ori: o dată la însumarea după i şi o dată la însumarea după j, când de fapt în joc este aceeaşi energie potențială de interacțiune între particulele i şi j.

Egalând (1.58) cu (1.62) se obține:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{1.66}$$

Fiindcă stările 1 şi 2 sunt arbitrare, se poate spune că:

$$E = T+V = const., \tag{1.67}$$

adică, în condițiile de stabilire a relației (1.67), energia mecanică totală a sistemului se conservă.

CAPITOLUL 2

TERMODINAMICĂ

2.1 NOȚIUNI FUNDAMENTALE

Se numeşte **sistem termodinamic**, orice parte finită a universului, adică orice porțiune pentru care se poate stabili un interior şi un exterior[1]. Această definiție este destul de generală şi de aceea – destul de vagă. Pentru a o face mai precisă, trebuie să-i aducem câteva amendamente. În primul rând să menționăm că din punct de vedere *spațial,* sistemul termodinamic nu poate avea o extindere oricât de mică, el trebuind să aibă totuşi caracter macroscopic. În al doilea rând, trebuie presupus că fenomenele fizice, chimice, biologice sau de altă natură, care se petrec în interiorul sistemului termodinamic, sunt însoțite direct sau indirect şi de fenomene termice. În sfârşit, vom admite că sistemul termodinamic (ansamblul corpurilor din interiorul său) are o structură continuă sau cvasicontinuă; altfel spus, sistemul termodinamic trebuie presupus omogen sau cel puțin omogen pe porțiuni (pe subsisteme). Exemple de sisteme termodinamice: un gaz (perfect sau real) închis într-o incintă de volum fix sau variabil, un dielectric aflat într-un câmp electric, o substanță magnetică în câmp magnetic, vaporii de apă din cilindrul unei maşini cu aburi, un lichid, un corp solid etc.

În studiul sistemelor termodinamice este importantă posibilitatea determinării stării în care se află ele la un moment dat. Starea oricărui sistem termodinamic va fi descrisă cu ajutorul unui anumit **set de parametri** (de stare). Grupul de parametri se consideră complet dacă stările a două sisteme termodinamice identice, aflate în condiții identice, descrise de aceleaşi valori ale parametrilor, nu pot fi distinse una de alta prin experiențe efectuate la scară macroscopică.

Din punct de vedere al stabilității în timp a stării macroscopice a sistemelor termodinamice, distingem două tipuri de stări: 1) **stări staționare** (care nu se modifică în timp) şi 2) **stări nestaționare** (care se modifică în timp). Starea staționară a unui sistem se numeşte **stare de echilibru** (termodinamic) dacă toți parametrii care o descriu nu variază în timp şi nu există nici fluxuri care să implice un transport (staționar) de substanță.

Stările de echilibru se studiază în cadrul termodinamicii de echilibru (sau, mai corect spus, al *termostaticii*) în timp ce stările staționare de neechilibru şi stările de nestaționare se studiază în cadrul termodinamicii stărilor de neechilibru (numită şi termodinamică a proceselor ireversibile sau cinetică fizică).

---

[1] Termenul *exterior* va fi sinonim cu termenul *mediu înconjurător.*

În general, starea unui sistem termodinamic depinde de condițiile exterioare lui (condiții manifestate prin interacțiile sistemului cu mediul înconjurător). În legătură cu această dependență, un interes aparte îl prezintă cazurile în care condițiile exterioare sunt constante în timp şi au *aceleaşi valori* în toate punctele care delimitează sistemul termodinamic considerat, de mediul înconjurător. Experiența arată că în astfel de cazuri, sistemul trece întotdeauna, mai devreme sau mai târziu, într-o stare în care parametrii de stare nu mai variază, adică atinge **starea de echilibru termodinamic.** Această afirmație este cunoscută sub denumirea de **postulatul fundamental al termodinamicii.** Atât timp cât condițiile exterioare nu se mai modifică, starea de echilibru termodinamic a sistemului rămâne neschimbată.

Dacă starea macroscopică a unui sistem se modifică în timp, spunem că avem de-a face cu un **proces termodinamic** (sau simplu, proces). Procesul de trecere dintr-o stare de neechilibru într-o stare de echilibru se numeşte **proces de relaxare.**

Dintre procesele termodinamice, sunt deosebit de importante acelea care se desfăşoară cu o viteză mult mai mică decât procesele de relaxare [2] astfel încât în orice moment starea sistemului să poată fi considerată drept o stare de echilibru. Aceste procese se numesc **procese de echilibru** sau **procese cvasistatice.** Ele pot evolua atât în sensul de creştere a valorilor parametrilor de stare cât şi în sensul descreşterii lor. De aceea, se spune că procesele de echilibru sunt **procese reversibile** (pentru aceste procese timpul este izotrop). Din păcate, procesele de echilibru nu sunt decât o aproximație „la limită" a proceselor reale, care sunt în general procese de neechilibru (stările prin care trece sistemul în decursul proceselor reale nefiind de regulă stări de echilibru). Procesele reale sunt **procese ireversibile**, adică sunt procese care se pot desfăşura numai într-un anumit sens în raport cu variația unor parametri macroscopici – de exemplu în sensul creşterii entropiei (pentru procesele ireversibile timpul este anizotrop).

Revenind la problema parametrilor vom observa că există două categorii de parametri:

a) **parametri specific termodinamici** (de ex. temperatura)

b) **parametri nespecific termodinamici** (care sunt preluați din alte capitole ale fizicii) ca de exemplu presiunea şi volumul (preluați din mecanică), câmpul electric $\vec{E}$, inducția electrică $\vec{D}$, polarizarea $\vec{P}$ câmpul magnetic $\vec{H}$, inducția magnetică $\vec{B}$, magnetizarea $\vec{M}$ (preluați din electromagnetism) etc.

[2] Se poate admite că viteza proceselor de relaxare are acelaşi ordin de mărime cu viteza de propagare a sunetului prin mediul (sistemul) considerat.

Parametrii de stare nu au toți același rol în descrierea stării unui sistem termodinamic. Unii, ca de exemplu presiunea, sunt legați de *forțele* sau *intensitățile* unor acțiuni ale *lumii înconjurătoare* asupra sistemului termodinamic și poartă denumirea de parametri **de forță** sau parametri **intensivi**. În general, îi vom nota cu litera **A** (care eventual mai poate avea și un indice inferior). Alții, ca de exemplu volumul, se referă la extinderea sau dimensiunile (în general la *poziția*) sistemului termodinamic în raport cu *lumea înconjurătoare* și de aceea poartă denumirea de parametri **de poziție** sau parametri **extensivi**. În general îi vom nota cu litera **a** (care eventual mai are și un indice inferior).

Trebuie să mai relevăm un aspect foarte important, anume acela că nu în orice stare a sistemului, toți parametrii au un sens bine definit. Să considerăm un vas cilindric format din două compartimente separate între ele printr-un piston fix. Să presupunem că într-un compartiment se află un gaz, iar în celălalt este vid. Sa scoatem acum pistonul care separă cele două compartimente. Gazul începe să treacă și în compartimentul în care inițial era vid. Este evident că în primele momente ale acestui proces, volumul gazului din vas nu va fi bine determinat. Procesul are loc treptat, densitatea gazului din compartimentul inițial plin descrescând din punct în punct, după o lege extrem de complicată și a delimita volumul gazului este practic imposibil! Acest exemplu ne arată de asemenea că există unii parametrii care au valori diferite în diverse puncte din interiorul sistemului (aici densitatea). În astfel de situații în sisteme apar fluxuri care fac să se desfășoare procese care conduc în final la stări de echilibru. În multe situații și presiunea poate fi diferită în diferite puncte ale sistemelor.

Este evident că atunci când o *forță* **A** acționează din exterior asupra sistemului, apare ca efect o variație a unui parametru de poziție **a.** Dacă grupul de parametrii este complet, **este necesar ca fiecărui parametru intensiv să-i corespundă un anumit parametru extensiv.** Cu alte cuvinte, dacă grupul de parametrii este complet acest grup este format dintr-un număr **par** de parametri, fiecărui parametru intensiv corespunzându-i un anumit parametru extensiv. Numărul parametrilor și natura lor poate varia de la sistem la sistem sau, în cazul aceluiași sistem, poate depinde de complexitatea și profunzimea studiului pe care dorim să-l întreprindem. O convenție frecvent folosită în alegerea parametrilor intensivi și extensivi asociați este aceea ca produsul lui **A** cu **a** (A și a fiind asociați) să aibă dimensiuni energetice. Cu alte cuvinte, în virtutea celor menționate mai sus, produsul lui **A** cu variația **da** a parametrului extensiv asociat, reprezintă lucrul mecanic elementar efectuat de mediul înconjurător asupra sistemului:

$$\delta L = A \cdot da \qquad \text{sau în general} \qquad \delta L = \sum_i A_i \cdot da_i \tag{2.1}$$

(motivele pentru care în loc de dL notăm lucrul mecanic elementar prin δL se vor elucida mai târziu).

O altă noțiune foarte importantă în termodinamică este noțiunea de **izolare** (a sistemului termodinamic în raport cu exteriorul său). În funcție de proprietățile învelişului sistemului (respectiv de proprietățile pe care le are materialul cu care se realizează în mod efectiv izolarea), din punct de vedere practic (experimental), se pot obține diferite izolări. O izolare se numeşte **adiabatică** dacă singurele schimbări care pot avea loc în starea sistemului sunt datorate în exclusivitate *forțelor* reprezentate prin parametri intensivi A_i, $i = \overline{1,n}$ şi se manifestă prin variațiile da_i $i = \overline{1,n}$ ale parametrilor extensivi. Cu alte cuvinte, izolarea este adiabatică atunci când sistemul poate *schimba* cu mediul înconjurător numai lucru mecanic.

2.2 PRINCIPIUL ZERO AL TERMODINAMICII

Principiul zero al termodinamicii permite introducerea unei mărimi de stare specific termodinamică, şi anume **temperatura empirică.** Ca şi celelalte principii ale fizicii, principiul zero rezultă din experiență, enunțul său fiind o generalizare a unui ansamblu de rezultate experimentale particulare.

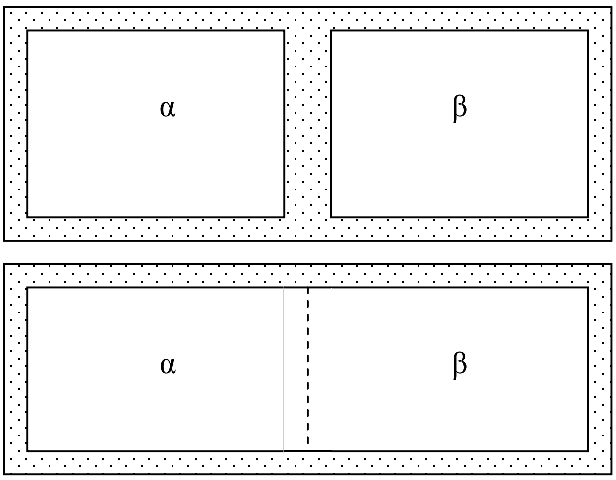


Fig. 2.1

Înainte de a enunța acest principiu să menționăm cîteva proprietăți ale echilibrului termodinamic. Fie α un sistem omogen, izolat adiabatic, aflat în starea de echilibru S_α şi β un alt sistem, de asemenea omogen şi izolat adiabatic, aflat în starea de echilibru S_β. Să desființăm acum peretele adiabatic care separă sistemul α de sistemul β. Sistemul global $\alpha \cup \beta$, termic omogen şi izolat adiabatic de mediul înconjurător, se va găsi într-o stare care în general nu mai este o stare de echilibru. Dacă însă, prin reunirea sistemelor α şi β, acestea continuă să rămână mai departe în stările S_α şi S_β, spunem că starea S_α a subsistemului α se află în relaţie de echilibru cu starea S_β a subsistemului β; în acest caz şi sistemul global $\alpha \cup \beta$ se află în stare de echilibru termodinamic (Fig. 2.1). Simbolic, vom nota acest echilibru scriind $S_\alpha \in S_\beta$ (S_α este în relaţia de echilibru cu S_β). Relaţia de echilibru termic este evident o relaţie **simetrică**

$$S_\alpha \in S_\beta \Leftrightarrow S_\beta \in S_\alpha \tag{2.2}$$

adică, dacă α se află în relaţie de echilibru termodinamic cu β, atunci şi β este în echilibru termodinamic cu α.

Relaţia de echilibru este şi **reflexivă:**

$$S_\alpha \in S_\alpha \qquad \text{sau} \qquad S_\beta \in S_\beta \tag{2.3}$$

orice stare de echilibru fiind în echilibru termic cu ea însăşi. Este evident că relaţia de reflexivitate este o consecinţă directă a definiţiei stării de echilibru termodinamic.

Dacă prin reunirea celor două sisteme α şi β aflate în stările de echilibru S_α, respectiv S_β, se obţine o stare de neechilibru, cele două stări nu sunt în echilibru. În acest caz vom scrie:

$$S_\alpha \notin S_\beta$$

Este evident că relaţia de neechilibru deşi este o relaţie simetrică (dacă $S_\alpha \notin S_\beta$ atunci $S_\beta \notin S_\alpha$) ea nu mai este o relaţie reflexivă.

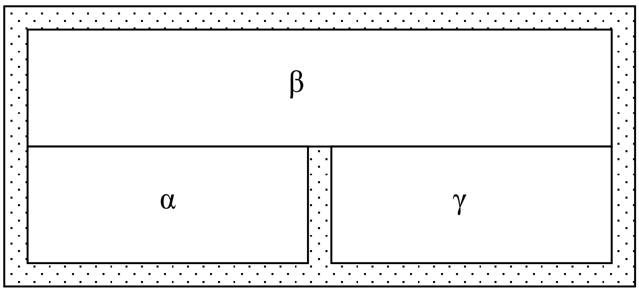


Fig. 2.2

Pentru a evidenţia o a treia proprietate a relaţiei de echilibru să considerăm trei sisteme α, β şi γ, izolate într-un înveliş adiabatic (faţă de mediul exterior), sistemele α şi γ fiind la rândul lor separate printr-un perete adiabatic. Peretele de separare dintre sistemul β şi celelalte două sisteme nu este adiabatic (Fig. 2.2). Atunci, conform principiului fundamental al termodinamicii, după un timp suficient de lung, sistemele α şi β respectiv β şi γ (care nu sunt izolate adiabatic între ele), ajung în stare de echilibru termodinamic şi totodată şi în relația de echilibru termic între ele, adică:

$$S_\alpha \in S_\beta \quad \text{şi} \quad S_\beta \in S_\gamma .$$

Experiența ne arată că, dacă înlăturăm peretele adiabatic izolat dintre α şi γ, starea celor două sisteme nu mai variază, adică **şi sistemele α şi γ se află în echilibru între ele** $S_\alpha \in S_\gamma$. În consecință, putem afirma că echilibrul termic este **tranzitiv,** ceea ce se notează simbolic astfel:

$$S_\alpha \in S_\beta \quad \text{şi} \quad S_\beta \in S_\gamma \quad \Rightarrow \quad S_\alpha \in S_\gamma \qquad (2.4)$$

Principiul zero al termodinamicii exprimă (afirmă) tocmai această din urmă proprietate a echilibrului termodinamic, sub forma generală: **tranzitivitatea este o proprietate generală a echilibrului termic.**

Parametrul intensiv, de natură termică, comun sistemelor aflate în echilibru termic se numeşte **temperatură empirică** şi se va nota cu θ. Parametrul extensiv, de natură termică, asociat temperaturii empirice va putea fi introdus numai pe baza principiului doi al termodinamicii şi se numeşte **entropie empirică.**

Din principiul zero al termodinamicii rezultă că temperatura empirică θ a unui sistem în echilibru termodinamic este o funcție de parametri intensivi şi extensivi, adică:

$$\theta = \theta\ (A_1 \ldots A_n,;\ a_1, \ldots, a_n) \qquad (2.5)$$

sau mai general:

$$A_i = A_i\ (a_1, \ldots, a_n;\ \theta\ ),\ i = \overline{1,n} \qquad (2.6)$$

Relațiile de acest tip poartă denumirea de **ecuații termice de stare.** În cadrul intrinsec al termodinamicii aceste ecuații se pot determina numai experimental.

2.3 MĂSURAREA TEMPERATURII EMIPIRICE. TEMPERATURA ABSOLUTA. TERMOMETRUL CU GAZE PERFECTE

Să presupunem că aducem în contact două sisteme termodinamice α şi β aflate în stările de echilibru S_α şi S_β. În conformitate cu cele discutate în paragraful precedent dacă stările S_α şi S_β se mențin şi după realizarea contactului, spunem că cele două sisteme au avut (şi continuă să aibă) aceeaşi temperatură empirică, $\theta_\alpha = \theta_\beta$. Din contră, dacă după realizarea contactului, stările sistemelor α şi β vor evolua spre o altă stare de echilibru, vom afirma că cele două sisteme au avut inițial temperaturi empirice diferite $\theta_\alpha \neq \theta_\beta$.

Pentru măsurarea temperaturii, definirea egalității sau inegalității temperaturilor a două corpuri (sisteme) este necesară dar nu este şi suficientă; pentru aceasta este necesară şi alegerea unei scări empirice de temperatură.

Evident, măsurarea temperaturii se poate face cantitativ, dacă aducem două sisteme în contact. Unul dintre acestea va servi ca etalon şi se va numi **corp termometric** (sau simplu, **termometru**). În legătură cu celălalt sistem, el va trebui să satisfacă următoarea condiție: temperatura lui trebuie să nu se modifice la contactul cu termometrul. Generalizând, vom spune că sistemele a căror temperatură nu variază la contactul cu alte sisteme, se numesc **termostate.** Rezultă deci că pentru măsurarea temperaturii este necesară realizarea contactului între termometru şi termostat.

Procedeul concret de măsurarea temperaturii este în ultimă instanță un procedeu convențional. Istoric vorbind, pentru măsurarea temperaturii s-au construit de multă vreme termometre care s-au bazat pe dilatarea termică a unor lichide sau gaze, folosind repere fixe în scara de temperatură (de ex. punctul de solidificare sau de fierbere al unui lichid la presiune normală). Este evident însă că măsurarea temperaturii prin care aceste metode are un destul de mare caracter arbitrar, fie din cauza procedeului de lucru (folosirea dilatării ca proprietate termometrică), fie din cauza alegerii arbitrare a substanței corpului termometric (alcool, mercur).

Ieşirea din acest arbitrar se poate realiza dacă definim o scară de temperatură care foloseşte nu proprietățile unui anumit corp, ci proprietățile unei întregi categorii de corpuri (substanțe) cum ar fi gazele perfecte. Se ajunge astfel la definirea **termometrului cu gaz perfect.** Pentru caracterizarea gazului perfect vom alege ca parametru presiunea p şi volumul V şi în stările de echilibru avem ecuația termică de stare:

$$\theta = \theta\ (p, V) \qquad (2.7)$$

Aducând sistemul (gazul perfect) în contact cu un termostat şi măsurând valorile parametrilor (p, V) pentru stările de echilibru, vom putea trasa izoterma (1) care corespunde temperaturii θ a termostatului. Aducând sistemul (gaz perfect) în contact cu un alt termostat, cu temperatura θ' vom putea trasa o altă izotermă (2). Procedând în acest fel, vom putea reprezenta în planul (p, V) o întreagă familie de izoterme corespunzând temperaturilor $\theta, \theta', \theta'', \theta''', \ldots$ ale termostatelor utilizate.

Izotermele din familie nu se vor intersecta căci dacă două izoterme s-ar intersecta aceeaşi stare ar fi caracterizată prin două temperaturi empirice diferite, ceea ce ar însemna că temperatura nu ar mai fi o funcție de stare.

p

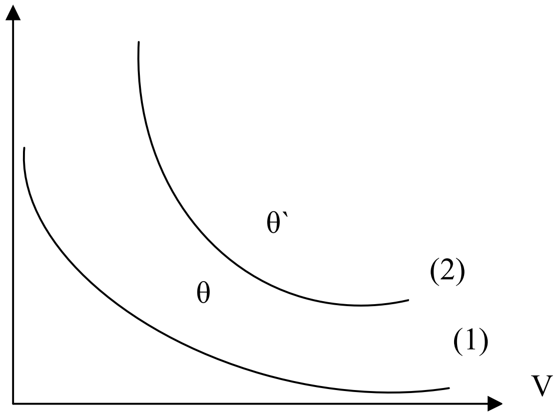


Fig. 2.3

Studiul experimental al comportamentului gazelor perfecte a condus (încă de acum trei secole) la formularea următoarelor **legi:**

1. **Legea Boyle – Mariotte (B. M.)**

Această lege afirmă că produsul dintre presiune şi volum rămâne constant atunci când gazul perfect se află mereu în contact cu un acelaşi termostat (adică la o temperatură θ dată). Vom scrie :

$$p \cdot V = f(\theta) \tag{2.8}$$

funcţia $f(\theta)$ fiind o funcţie monotonă de temperatură, în rest arbitrară. Această funcţie $f(\theta)$ defineşte o scară de temperatură empirică, a cărei alegere concretă este pur convenţională. Să convenim a alege această funcţie sub formă liniară:

$$f(\theta) = a \cdot \theta + b \tag{2.9}$$

în care a şi b sunt două constante.

2. **Legea Gay-Lussac (GL)**

Această lege arată că, pentru toate gazele perfecte, dilatarea, la presiune constantă, se face la fel. Mai exact, legea afirmă că dacă presiunea rămâne constantă (la valoarea p) iar V_1 şi V_2 sunt volumele gazului corespunzând temperaturilor empirice θ_1 şi θ_2, atunci raportul:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} \tag{2.10}$$

este aceeaşi pentru **toate** gazele şi independent de cantitatea de gaz.

Din legea GL şi legea BM cu $f(\theta)$ de forma (2.9), rezultă:

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{pV_2 - pV_1}{pV_1} = \frac{f(\theta_2) - f(\theta_1)}{f(\theta_1)} = \frac{a(\theta_2 - \theta_1)}{a\theta_1 + b} \tag{2.11}$$

Fie acum θ_1 temperatura de îngheţare a apei (la presiune normală) şi θ_2 temperatura de fierbere a apei (de asemenea la presiune normală). În aceste condiţii, raportul (2.10) are valoarea experimentală $\frac{1}{2,7316}$. Dacă facem convenția (Celsius), că diferența de temperatură dintre cele două stări menționate să fie de 100 de diviziuni (100 de grade Celsius) vom scrie θ_2-θ_1=100 şi avem :

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{100a}{a\theta_1 + b} = \frac{1}{2,7316} \tag{2.12}$$

De aici rezultă :

$$\theta_1 = 273,16 - \frac{b}{a} \tag{2.13}$$

Luând $\frac{b}{a} = 273,16$ rezultă θ_1=0 şi θ_2=100. Această scală de temperatură este **scara Celsius.**

Luând b=0, obținem θ_1=273,16 şi θ_2=373,16 . Această scară de temperatură este cunoscută ca scara absolută sau **scara Kelvin.** În consecință temperaturile exprimate în scara absolută se vor nota cu T. În scara Kelvin (absolută) ecuația gazelor perfecte devine:

$$p \cdot V = a\theta_{Kelvin} = a \cdot T \tag{2.14}$$

a fiind o constantă dependentă de cantitatea de gaz considerat (când volumul se dublează, V`=2V, se dublează şi această constantă, a`=2a).

Este important să se exprime legea gazelor perfecte sub o astfel de formă încât constanta *a* să fie definită pentru o anumită cantitate de gaz. Presupunând că V este volumul molar (0,022414m^3), pentru un mol de gaz, ecuația gazelor perfecte este:

$$p \cdot V = R \cdot T \tag{2.15}$$

în care R este constanta **universală** a gazelor perfecte, egală cu 8,31 Joule/mol·Kelvin.

Observație: În practică, drept gaz perfect pentru termometrul cu gaz, se foloseşte hidrogenul (prin convenție).

2.4 PRINCIPIUL ÎNTAI AL TERMODINAMICII

Pe baza unui mare număr de experiențe s-a putut ajunge la următoarea concluzie care constituie enunțul primului principiu al termodinamicii: **dacă un sistem termodinamic este închis într-un înveliş adiabatic şi trece dintr-o stare inițială (i) într-o stare finală (f) printr-o transformare oarecare, lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare nu depinde decât de starea (parametrii stării) (i) şi de starea (parametrii stării) (f), fiind independent de modul concret în care a avut loc transformarea.**

Din punct de vedere matematic această afirmație implică faptul că lucrul mecanic elementar este o **diferențială totală exactă.** De aceea vom scrie:

$$L_{if} = \int_{(i)}^{(f)} \delta L = U_f - U_i \qquad \text{sau} \qquad L = dU \qquad (2.16)$$

în care mărimea U, dependentă numai de parametrii care caracterizează o anumită stare, se numeşte **energie internă.** Ea este o **funcție (mărime) de stare**. Deşi din punct de vedere dimensional energia internă şi lucrul mecanic au aceleaşi dimensiuni (se măsoară în Jouli); între aceste două mărimi trebuie făcută o distincție netă: în timp ce energia internă depinde numai de **starea** sistemului, lucrul mecanic este definit numai pentru o **transformare** a stării sistemului.

Din modul în care a fost definită, este clar că energia internă U este determinată numai până la o constantă aditivă arbitrară (cu dimensiuni de energie). Vom putea vedea însă că în rezolvarea multor probleme concrete această arbitrarietate nu este deloc supărătoare (deoarece ceea ce interesează este, de cele mai multe ori, variația energiei interne).

Să ridicăm acum restricția de izolare adiabatică a sistemului. În aceste cazuri, experiența arată că relația (2.16) nu mai este verificată, adică:

$$U_f - U_i \neq L_{if} \qquad (2.17)$$

Acest fapt ne arată că în general lucrul mecanic elementar nu mai este o diferențială totală exactă, $\delta L \neq dU$. Prin definiție, diferența dintre variația de energie internă $U_f - U_i$ şi lucrul mecanic L_{if} va fi numită **cantitate de căldură (primită sau cedată) schimbată** de sistem cu mediul exterior în transformarea de la starea (i) la starea (f):

$$Q_{if} = U_f - U_i - L_{if} \qquad (2.18)$$

Într-un proces infinitezimal această relație are forma:

$$\delta Q = dU - \delta L \qquad \text{sau} \qquad dU = \delta Q + \delta L \qquad (2.19)$$

Din aceste relații rezultă **o altă definire a izolării adiabatice**: un sistem se spune că este izolat adiabatic de mediul înconjurător dacă el nu schimbă căldura cu acesta.

Putem da acum formularea completă a primului principiu al termodinamicii în felul următor: **variația energiei interne a unui sistem la trecerea de la o stare la alta este egală cu suma dintre lucrul mecanic şi cantitatea de căldură schimbate de sistem cu exteriorul.** (Subliniem că în timp ce dU este o diferențială totală exactă, δL şi δQ nu sunt – în general- diferențiale totale exacte şi de aceea litera d este înlocuită cu δ).Pentru schimbul de căldură (ca şi pentru lucrul mecanic) vom adopta următoarea convenție: **cantitatea de căldură este pozitivă**

dacă este primită de sistem de la mediul înconjurător şi negativă dacă este cedată de sistem mediului înconjurător.

o funcție de stare, energia internă este perfect determinată de parametrii intensivi A_i şi extensivi a_i ($i = \overline{1,n}$) ai stării considerate:

$$U = U(A_1,...,A_n;\ a_1,...,a_n) \tag{2.20}$$

Ținând cont de ecuațiile termice de stare (2.6) şi presupunând că temperatura este măsurată în scara Kelvin mai putem scrie:

$$U = U(T;\ a_1,...,a_n) \tag{2.21}$$

Această dependență poartă denumirea de **ecuație calorică de stare.** În cadrul intrinsec al termodinamicii ea nu se poate determina decât pe baza datelor experimentale (obținute cât mai precis).

2.5 CAPACITĂȚI CALORICE. CĂLDURI LATENTE

Ținând cont de expresia lucrului mecanic elementar (2.1), principiul întâi se poate scrie sub următoarele forme:

$$dU = \delta Q + \sum_{i=1}^{n} A_i da_i \tag{2.22}$$

sau:

$$dH = \delta Q - \sum_{i=1}^{n} A_i da_i \tag{2.23}$$

unde funcția H, definită prin relația:

$$H = U - \sum_{i=1}^{n} A_i a_i \tag{2.24}$$

poartă denumirea de **entalpia sistemului.** Presupunând că energia internă se cunoaşte în funcție de temperatură şi parametrii extensivi, $U = U(T;\ a_1,a_2,...,a_n)$, respectiv că entalpia se cunoaşte în funcție de temperatură şi parametrii intensivi, $H = H(T;\ A_1,A_2,...,A_n)$ putem scrie:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{(a)} \cdot dT + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial a_i}\right)_{T,\tilde{a}_i} \cdot da_i$$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{(A)} \cdot dT + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial A_i}\right)_{T,\tilde{A}_i} \cdot dA_i \tag{2.25}$$

Indicii inferiori ataşați derivatelor parțiale arată care sunt mărimile presupuse constante în timpul derivării. Prin (a) şi (A) vom înțelege ansamblul parametrilor extensivi şi intensivi. Simbolurile $\tilde{a}_i$ şi $\tilde{A}_i$ sunt definite conform relațiilor:

$\tilde{a}_i = (a_1,...,a_{i-1}, a_{i+1} ... a_n)$; $\tilde{A}_i = (A_1, ..., A_{i-1}, A_{i+1}, ... A_n)$ (2.26)

Schimburile elementare de căldură se scriu acum sub forma:

$$\delta Q = dU - \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot da_i = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{(a)} \cdot dT + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial ai}\right)_{T,\tilde{a}_i} - A_i\right] \cdot da_i \tag{2.27}$$

respectiv:

$$\delta Q = dH + \sum_{i=1}^{n} a_i dA_i = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{(A)} \cdot dT + \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial A_i}\right)_{T,\tilde{A}_i} + a_i\right] \cdot dA_i \tag{2.28}$$

Se numesc **capacități calorice** următoarele limite:

$$C_{a_i} = \lim_{\Delta T \to o}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_{a_i}, \qquad C_{A_i} = \lim_{\Delta T \to O}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_{A_i} \tag{2.29}$$

În primul caz avem de-a face cu capacitate calorică la a_i=constant. Dacă toți $a_i, \left(i = \overline{1,n}\right)$ sunt constanți avem:

$$C_{(a)} \equiv C_{a_1 a_2,...a_n} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{(a)} \qquad \text{deoarece } \delta Q = dU \tag{2.30}$$

Similar, dacă toți $A_i, \left(i = \overline{1,n}\right)$ sunt constanți avem:

$$C_{(A)} \equiv C_{A_1 A_2,...A_n} = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{(A)} \qquad \text{deoarece } \delta Q = dH \tag{2.31}$$

Capacitățile calorice referitoare la 1 mol de substanță se numesc **călduri molare,** iar cele referitoare la unitatea de masă de substanță se numesc **călduri specifice.**

Se numesc **călduri latente** următoarele limite

$$\lambda_i = \lim_{\Delta a \to O}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta a_i}\right)_{T,\tilde{a}_i}, \qquad \Lambda_i = \lim_{\Delta A_i \to O}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta A_i}\right)_{T,\tilde{A}_i} \tag{2.32}$$

În primul caz, λ_i este căldura latentă de variație a parametrului a_i, toți ceilalți parametri extensivi şi temperatura fiind constanți. În al doilea caz, Λ_i este căldura latentă de variație a parametrului A_i, toți ceilalți parametri intensivi şi temperatura fiind constanți. Din (2.27) respectiv (2.28) rezultă:

$$\lambda_i = \left(\frac{\partial U}{\partial a_i}\right)_{T,\tilde{a}_i} - A_i, \qquad \Lambda_i = \left(\frac{\partial H}{\partial A}\right)_{T,\tilde{A}_i} + a_i \tag{2.33}$$

Ținând cont de expresiile capacităților calorice şi a căldurilor latente, putem exprima schimburile elementare de căldură sub următoarele forme:

$$\delta Q = C_{(a)} \cdot dT + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i da_i\ , \qquad \delta Q = C_{(A)} \cdot dT + \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i dA_i \tag{2.34}$$

Aceste expresii nu sunt în general diferenţiale totale exacte de variabile (T; $a_1, ..., a_n$) respectiv (T, $A_1, ..., A_n$) şi se numesc **forme Pfaff.**

Capacităţile calorice şi căldurile latente sunt mărimi care se determină experimental, prin **metode calorimetrice.**

În continuare să ne referim la cazul unui sistem simplu pentru care n=1, adică există un singur parametru extensiv **a** şi un singur parametru intensiv **A**. Putem scrie:

$$\delta Q = C_a \cdot dT + \lambda \cdot da\ , \qquad \delta Q = C_A \cdot dT + \Lambda \cdot dA \tag{2.35}$$

unde:

$$C_a = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_a , \qquad C_A = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_A , \qquad H = U - A \cdot a\ ,$$

$$\lambda = \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_T - A\ , \qquad \Lambda = \left(\frac{\partial H}{\partial A}\right)_T + a$$

Împărţind prima relaţie din (2.35) prin dT şi considerând A=const. avem:

$$C_A = \left(\frac{\partial Q}{dT}\right)_A = C_a + \lambda \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A = C_a + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_T - A\right] \cdot \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A \tag{2.36}$$

În mod similar, împărţind a doua relaţie din (2.35) prin dT şi considerând a=constant avem:

$$C_a = \left(\frac{\partial Q}{dT}\right)_a = C_A + \Lambda \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_a = C_A + \left[\left(\frac{\partial H}{\partial A}\right)_T + a\right] \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_a \tag{2.37}$$

Aceste relaţii de legătură ne arată că, în general, C_A diferă de C_a. Ele prezintă o importanţă practică deosebită.

Să ne referim concret la cazul unui fluid pentru care A = -p şi a=V. Atunci avem:

$$C_p - C_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{2.38}$$

Sau:

$$C_p - C_V = \left[V - \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T\right] \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad \text{cu } H = U + pV \tag{2.39}$$

Pentru un **gaz perfect**, din experienţă se ştie că energia internă U depinde numai de temperatură şi nu depinde de volum, adică $\left(\partial U / \partial V\right)_T = 0$ **(efect Joule).**

Din această cauză entalpia H depinde numai de temperatură şi nu depinde de presiune, adică $(\partial H/\partial p)_T = 0$.

Relațiile anterioare ne dau:

$$C_p - C_V = p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad \text{sau} \qquad C_p - C_V = V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \tag{2.40}$$

Pentru un mol de gaz perfect avem ecuația termică de stare pV=RT şi pentru căldurile molare obținem:

$C_p - C_V = R$ **(relația Robert Mayer)** (2.41a)

În multe cazuri practice este importantă cunoaşterea raportului $\gamma = C_p/C_V$. Cunoscut sub denumirea de **indice adiabatic** (vezi mai departe). Conform relației (2.41) avem:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} > 1 \tag{2.41b}$$

2.6 PROCESE POLITROPE

Se numesc politrope, acele procese pentru care schimbul elementar de căldură se poate scrie sub forma δQ=C·dT în care „capacitatea calorică" C a procesului este **constantă.** În particular, când C=0 procesele se numesc adiabatice. În cazul când n=1, conform relației (2.35) putem scrie:

$$\delta Q = C \cdot dT = C_a \cdot dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_T - A\right] \cdot da \tag{2.42}$$

Folosind relația (2.36) avem:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_T - A = \frac{C_A - C_a}{\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A} \tag{2.43}$$

şi (2.42) devine:

$$dT = \frac{C_A - C_a}{C - C_a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A} \cdot da \tag{2.44}$$

Dacă ecuația termică de stare a sistemului termodinamic are forma T=T(A,a), prin diferențiere obținem:

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a dA + \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da \tag{2.45}$$

Şi din (2.44) rezultă:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a \cdot dA + \frac{C - C_A}{C - C_a} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da = 0 \qquad (2.46)$$

Integrând această ecuaţie diferenţială obţinem forma generală a ecuaţiei procesului politrop pentru sistemul considerat, în variabilele A şi a. Trebuie să remarcăm însă că ecuaţia (2.46) se poate scrie sub formă explicită numai dacă pentru sistemul luat în studiu se cunosc ecuaţia termică şi ecuaţia calorică de stare: T=T(A,a) şi U=U(a,T).

Să continuăm calculul efectiv pentru cazul unui fluid la care $A = -p$ şi $a = V$. Ecuaţia (2.46) are acum următoarea formă:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \cdot dp + \frac{C - C_p}{C - C_V} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \cdot dV = 0 \qquad (2.47)$$

Dacă fluidul este un **gaz perfect monoatomic,** C_p şi C_v sunt mărimi constante şi **indicele politropic**

$$\eta = \frac{C - C_p}{C - C_V} \qquad (2.48)$$

este un număr adimensional constant.Integând ecuaţia (2.47) obţinem:ln·p – η ln V = constant

adică: $p \cdot V^{\eta}$ = constant sau $V \cdot p^{\frac{1}{\eta}}$ = const (2.49)

Ecuaţia (2.49) este ecuaţia politropei gazului perfect monoatomic.

Să discutăm acum câteva cazuri particulare:

1) Dacă η=0 obţinem p=constant, $C=C_P$ şi procesul politrop este de fapt un proces **izobar.**
2) Dacă η=1 obţinem pV=constant, respectiv T=constant şi procesul nostru este un **proces izoterm.** În acest caz C=∞
3) Dacă $\eta = \gamma = \frac{C_p}{C_v}$ obţinem C=0 şi procesul politrop este acum un proces **adiabatic,** cu ecuaţia pV^{γ}=constant (ecuaţia lui Poisson). Pentru un gaz perfect monoatomic $\gamma = 5/3$
4) Dacă η=∞ obţinem $C=C_V$ adică V=constant şi procesul nostru este un proces **izocor.**

Cele patru procese politrope particulare sunt reprezentate grafic în figura 2.4. Curba MM′ este izoterma iar curba NN′ este adiabata gazului perfect monoatomic. Ele se intersectează într-un singur punct (Q).

Se poate demonstra uşor că toate procesele politrope care se reprezintă în interiorul „unghiurilor” MQN şi M′QN′ au C‹0 iar cele care se reprezintă în interiorul „unghiurilor” MQN′

şi M′QN au C›0. Într-adevăr, să considerăm procesul QD şi să trasăm prin D izoterma AD şi adiabata BD. Fie T temperatura izotermei MQM′ şi T_1 temperatura izotermei AD. Evident $T_1<T$.

Din ecuaţia pV^{γ}=constant=K, rezultă că la un V dat, adiabatei mai ridicate îi corespunde o valoare mai mare a constantei K.

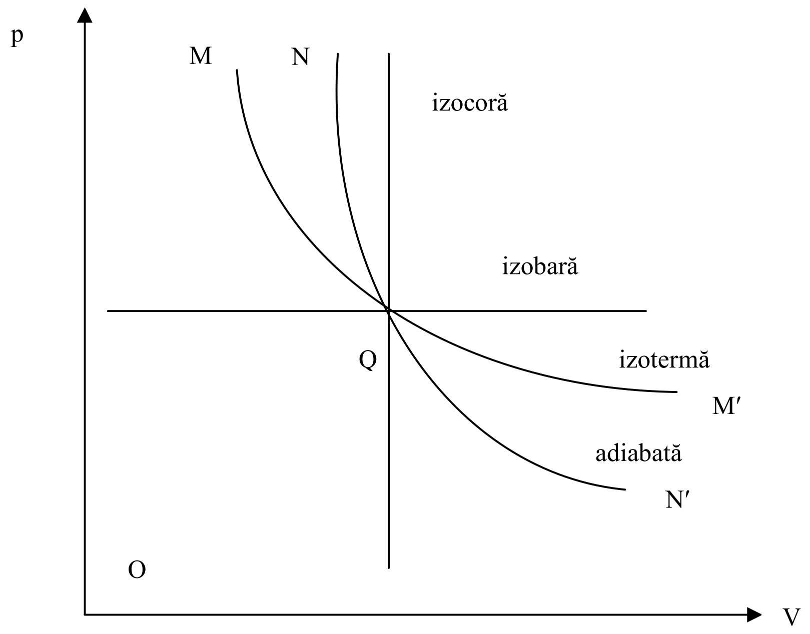


Fig.

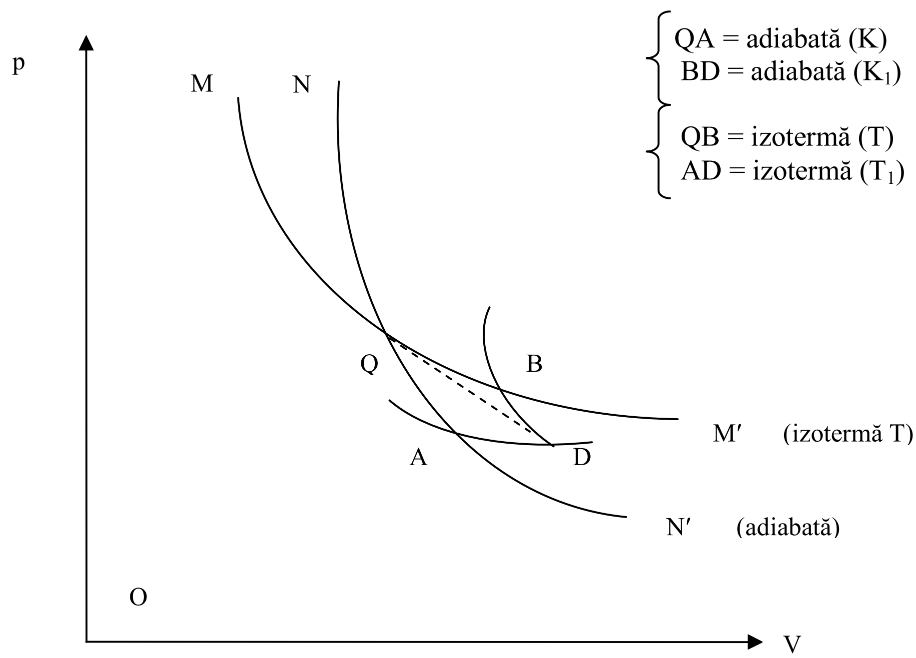


Fig. 2.5

Ecuația termică de stare a gazelor perfecte $pV = RT$ (pentru un mol) diferențiată $RdT= pdV + Vdp$ cu principiul întâi al termodinamicii $\delta Q = C_V\ dT + pdV$ ne dă:

$$R\cdot\delta Q = C_V(pdV + Vdp) + RpdV = (C_V + R)pdV + C_V Vdp =$$
$$= C_p\cdot p\cdot dV + C_V\cdot V\cdot dp = pVC_V(\frac{dp}{p} + \gamma\frac{dV}{V}) =$$
$$= pVC_V d(\ln pV^{\gamma}) = C_V\cdot pVd(\ln K)$$

Trecând de la K la K_1 avem o creştere a valorii acestei conatante şi deci $\delta Q > 0$. Cu alte cuvinte, trecerea la o adiabată superioară se face prin absorție de căldură (proces endoterm).

În procesul QD se trece de la punctul Q (situat pe adiabata QA de constantă K) la punctul D (situat pe adiabata BD de constanta K_1) ceea ce înseamnă $(\Delta Q)_{QD} > 0$. Tot în procesul QD se trece de la punctul Q (situat pe izoterma cu temperatură T) la punctul D (situat pe izoterma cu temperatură $T_1 < T$).

Aşadar, $(\Delta T)_{QD} = T_D - T_Q = T_1 - T < 0$. Prin urmare $C = \left[\frac{(\Delta Q)}{(\Delta T)}\right]_{QD} < 0$.

În procesul invers, DQ, avem de asemenea $C < 0$ însă acum din cauză că $\Delta Q < 0$ şi $\Delta T > 0$.

Un raționament similar se poate face şi în ″unghiul″ MQN obținând din nou $C < 0$ Din contră, în ‘’unghiurile’’ NQM' şi MQN' obținem $C > 0$.

2.7 PRINCIPIUL DOI AL TERMODINAMICII. TEOREMA LUI CARNOT

Formularea principiului întâi al termodinamicii, respectiv extinderea legii conservării şi transformării energiei, extindere care să înglobeze în bilanț şi căldura, era evident necersară. Principul întâi nu este însă şi suficient deoarece numai pe baza lui nu se poate elucida când este posibilă transformarea căldurii în lucru mecanic, respectiv a lucrului mecanic în căldură. De pildă într-un proces ciclic (ciclu) – când starea finală coincide cu starea inițială - primul principiu ne dă:

$$L + Q = 0 \tag{2.50}$$

unde:

$$L = \oint_{ciclu}\delta L, \qquad Q = \oint_{ciclu}\delta Q \qquad \text{şi} \qquad \oint_{ciclu} dU = 0$$

Relația (2.50) ne arată ca $|L| = |Q|$ şi poate fi satisfacută în următoarele variante:

a) $L > 0,$ $Q < 0,$ $|L| = |Q|$

b) $L = 0,$ $Q = 0,$

c) $L < 0,$ $Q > 0,$ $|L| = |Q|$

În cazul în care a) sistemul primeşte lucru mecanic pe care-l transformă într-o cantitate egală de căldură. În cazul c) sistemul primeşte căldură şi o transformă într-o cantitate egală de lucru mecanic.

Se ridică imediat următoarea întrebare: care dintre aceste procese se poate realiza în mod efectiv în natură? Necesitatea formulării principiului doi rezultă tocmai din imposibilitatea principiului întâi de a da un răspuns acestei întrebări. Enunțul principiului doi (formularea primară) este următorul: într-un proces termic monoterm (în care sistemul este în contact cu un singur termostat, la temperatură dată) procesul c) **nu se poate realiza niciodată.** Această afirmație este echivalentă cu afirmația că **nu este posibilă construirea unui perpetuum mobile de spețа a doua** (adică a unei maşini termice care primind căldură de la un singur izvor de căldură să o transforme integral, într-un proces ciclic, în lucru mecanic)

Se presupune acum că transformarea ciclică este şi reversibilă, adică ciclul poate fi parcurs şi în sens invers. Pentru cazul monoterm sunt posibile variantele a) şi b) adică $L \geq 0$ şi $Q \leq 0$. În procesul invers avem $L' = -L \leq 0$ şi $Q' = -Q \geq 0$. Conform formulării primare a principiului doi, varianta $L'<0$ şi $Q'>0$ este exclusă şi rezultă o singură variantă posibilă $L' = -L = 0$ şi $Q' = -Q = 0$

Concluzionând cele discutate până aici vom putea spune că în **transformări ciclice monoterme**:

$$L = 0 \quad , \quad Q=0 \text{ – pentru transformări reversibile,}$$
$$L > 0 \quad , \quad Q<0 \text{ – pentru transformări ireversibile.} \tag{2.51}$$

Vom studia acum transfomările ciclice, reversibile, biterme, în decursul cărora sistemul este în contact cu două termostate de temperaturi constante diferite T_1 şi T_2 . Vom presupune că $T_1 > T_2$ şi vom numi primul termostat *sursă caldă*, iar al doilea termostat *sursă rece*. Experiența arată că în acest caz varianta c) este realizabilă, adică este posibilă furnizarea de lucru mecanic mediului înconjurător; cu alte cuvinte, este posibilă realizarea unei maşini termice. Fie Q_1 şi Q_2 căldurile schimbate de sistem, într-un ciclu, cu termostatele T_1 respectiv T_2. Relația (2.50) se scrie acum sub forma:

$$L+Q=0 \qquad \text{cu} \quad Q=Q_1+Q_2$$

Dacă dorim ca lucru mecanic să fie furnizat mediului înconjurător, adică $L<0$, putem scrie $L=-|L|<0$ şi rezultă $Q=Q_1+Q_2>0$, adică $Q=|Q|>0$. Acest fapt poate fi înțeles în felul urmator: căldura Q_1 primită de sistem de la sursa caldă ($Q_1=|Q_1|>0$) este mai mare decât căldura cedată de sistem sursei reci ($Q_2=-|Q_2|<0$) adică $|Q_1|>|Q_2|$.

În acest fel, este acum clar că $Q=Q_1+Q_2=|Q_1|-|Q_2|>0$.

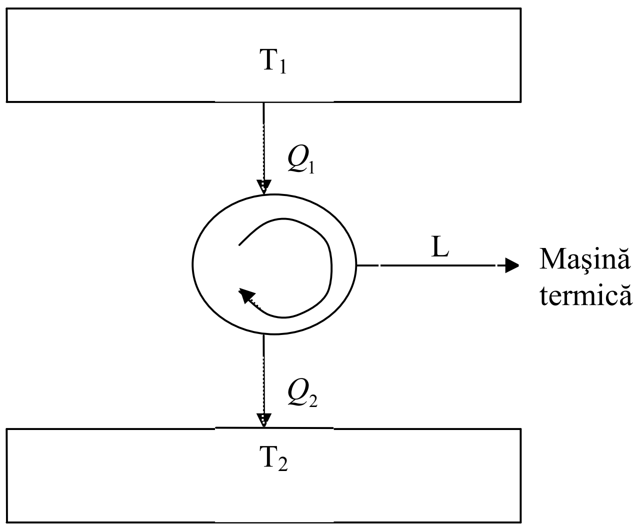


Fig.2.6

În studiul maşinilor termice se obişnuieşte să se introducă noțiunea de **randament**, mărime diferită ca raportul dintre lucrul mecanic efectuat şi căldura efectiv primită . Avem

$$\eta=\frac{|L|}{Q_1}=\frac{|L|}{|Q_1|}=\frac{|Q_1|-|Q_2|}{|Q_1|}<1$$

Se observă că randamentul este întotdeauna subunitar, fapt care exprimă imposibilitatea transformării integrale a căldurii efectiv primite, în lucru mecanic. Randamentul se mai poate scrie şi sub forma:

$$\eta=1-\frac{|Q_2|}{|Q_1|}=1+\frac{Q_2}{Q_1} \qquad (2.52)$$

Teorema lui Carnot:

Raportul Q_2/Q_1 nu depinde de sistemul considerat ci numai de temperaturile T_1 şi T_2 ale termostatelor cu care sistemul se pune în contact.

Înainte de a trece la demonstrarea acestei teoreme, să ne ocupăm puțin de *maşinile frigorifice biterme***.**

În virtutea versibilitații presupuse, procesul ciclic, biterm discutat (cu $T_1>T_2$) poate fi parcurs şi în sens invers. Vom nota cu indice prim toate mărimile referitoare la parcurgerea ciclului în sens contrar. Avem $Q'_1 = -Q_1 = -|Q_1| < 0,$ adică $Q'_1 = -|Q'_1| < 0$ şi $Q'_2 = -Q_2 = |Q_2| > 0$, adică $Q'_2 = |Q'_2| > 0$.

Aceasta înseamnă că sistemul primeşte (absoarbe) căldură de la termostatul T_2 şi cedează căldură termostatului T_1 (cu $T_1>T_2$). Deoarece în procesul direct avem $|Q_1| > |Q_2|$ rezultă automat că în procesul invers $|Q'_1| > |Q'_2|$ astfel că $Q' = Q'_1 + Q'_2 = -|Q'_1| + |Q'_2| < 0$. Această relație şi relația $L' + Q' = 0$ (rezultată din principiul întâi) implică $L' = -Q' > 0$ adică $L' = |L'| > 0$.

De aici rezultă că maşina frigorifică poate să transporte căldură de la "sursa rece" T_2 la "sursa caldă" T_1 numai dacă mediul înconjurător furnizează sistemului lucru mecanic. În acest caz avem următorul "bilanț energetic" $|L'| + |Q'_2| = |Q'_1|$. Deoarece $|Q'_1| > |Q'_2|$, maşinile frigorifice se mai numesc şi *pompe de căldură* .

Să trecem acum la **demonstrarea teoremei lui Carnot**. Fie (α) şi (β) două sisteme fizice ale căror substanțe de lucru sunt diferite, evoluând fiecare, prin transformări ciclice, reversibile, biterme. Notăm cu T_1 şi T_2 ($T_1 > T_2$) temperaturile celor două termostate cu care sistemele (α) şi (β) realizează schimburi de căldură. Fie $Q_1^{(\alpha)}$ şi $Q_2^{(\alpha)}$ cantitățile de căldură schimbate de sistemul (α) într-un ciclu parcurs în sens direct cu cele două temostate. În mod similar, fie $Q_1^{(\beta)}$ şi $Q_2^{(\beta)}$ cantitățile de căldură schimbate de sistemul (β) într-un ciclu, tot în sens direct, cu aceleeaşi termostate. Deoarece am presupus $T_1>T_2$, la parcurgerea ciclului în sens direct avem:

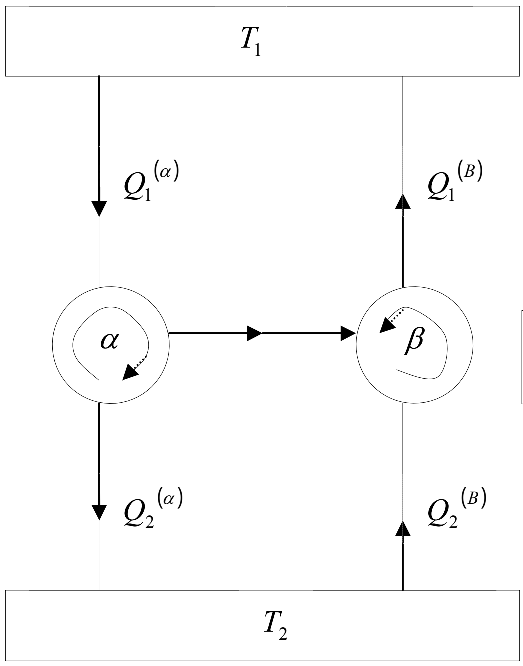
$$Q_1^{(\alpha)} = \left|Q_1^{(\alpha)}\right| > 0, \qquad Q_2^{(\alpha)} = -\left|Q_2^{(\alpha)}\right| < 0,$$

$$Q_1^{(\beta)} = \left|Q_1^{(\beta)}\right| > 0, \qquad Q_2^{(\beta)} = -\left|Q_2^{(\beta)}\right| < 0,$$

$$\text{şi} \quad \begin{array}{l} \left|Q_1^{(\alpha)}\right| > \left|Q_2^{(\alpha)}\right|, \\ \left|Q_1^{(\beta)}\right| > \left|Q_2^{(\beta)}\right| \end{array}$$

Să reunim (cuplăm) cele două sisteme într-un singur sistem (α) $\cup$ (β) (Fig. 2.8) şi să presupunem: transformarea ciclică compusă care constă din parcurgerea de către (α) a ciclului de n ori în sens direct (ca maşină termică) şi din parcurgerea de către (β) a ciclului de m ori în sens invers (ca maşină frigorifică). În acest proces ciclic global schimbul total de căldură cu termostatele T_1 şi T_2 este:

$$Q_1^{(\infty)\cup(\beta)} = nQ_1^{(\beta)} - mQ_1^{(\beta)}$$
$$Q_2^{(\alpha)\cup(\beta)} = nQ_2^{(\alpha)} - mQ_2^{(\beta)}$$



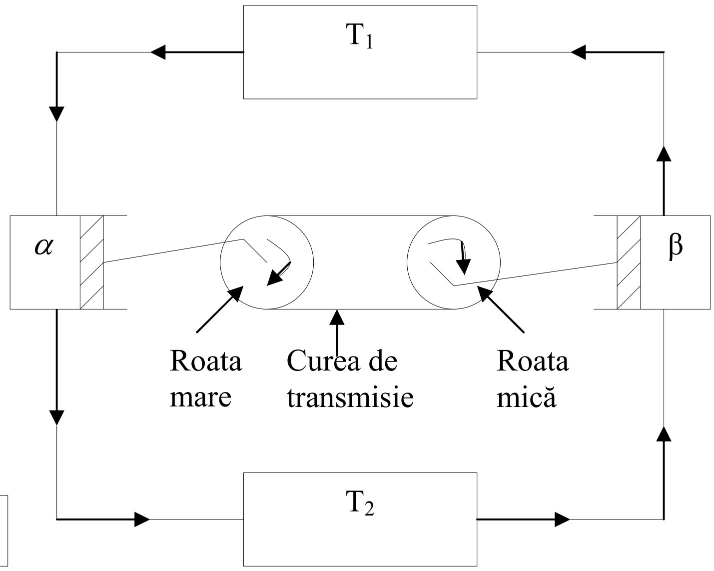


Fig. 2.8.a *Fig. 2.8.b*

Este evident că putem alege întotdeuna numerele n şi m astfel încât $Q_2^{(\alpha)\cup(\beta)} = 0$ adică în aşa fel ca

$$\text{n}Q_2^{(\alpha)} = m\ Q_2^{(\beta)} \qquad \text{sau } \frac{n}{m} = \frac{Q_2^{(\beta)}}{Q_2^{(\alpha)}} \tag{*}$$

Atunci sistemul global (α) $\cup$ (β) suferă de fapt o transformare ciclică, reversibilă, **monotermă**. S-a arătat însă (vezi formularea primară a principiului doi) că într-o astfel de transformare sistemul nu poate schimba căldură cu exteriorul, adică în mod necesar vom avea şi $Q_1^{(\alpha)\cup(\beta)} = 0$, respectiv:

$$nQ_1^{(\alpha)} = mQ_1^{(\beta)} \qquad \text{sau} \qquad \frac{n}{m} = \frac{Q_1^{(\beta)}}{Q_1^{(\alpha)}} \tag{**}$$

Finalmente rezultă: $\frac{n}{m} = \frac{Q_2^{(\beta)}}{Q_2^{(\alpha)}} = \frac{Q_1^{(\beta)}}{Q_1^{(\alpha)}}$ adică $\frac{Q_2^{(\beta)}}{Q_1^{(\beta)}} = \frac{Q_2^{(\alpha)}}{Q_1^{(\alpha)}}$

(dependent de (β)) (dependent de (α))

Ultima relație demonstrează teorema lui Carnot deoarece ea arată că raportul Q_2 / Q_1 nu depinde de natura sistemului (respectiv de substanța de lucru), ci poate depinde numai de temperaturile absolute ale termostatelor (T_1 şi T_2). Aşadar,

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(T_1, T_2)$$

în care $f(T_1, T_2)$ este o **funcție universală.**

Observații:

1). Cuplarea celor două sisteme implică pentru procesul global menționat $L^{(\alpha)\cup(\beta)} = 0$, adică $n\left|L^{(\alpha)}\right| = m\left|L^{(\beta)}\right|$, unde $\left|L^{(\alpha)}\right| = \left|Q_1^{(\alpha)}\right| - \left|Q_2^{(\beta)}\right|$ și $\left|L^{(\beta)}\right| = \left|Q_1^{(\beta)}\right| - \left|Q_2^{(\beta)}\right|$.

Evident $nL^{(\alpha)} < 0$ şi $mL^{(\beta)} > 0$

2). Numerele *n* şi *m* fiind presupuse numere naturale (întregi si pozitive), la alegerea lor în aşa fel încât $Q_2^{(\alpha)\cup(\beta)}$ să fie zero înseamnă obligatoriu caracter rațional pentru numărul $Q_2^{(\beta)} / Q_2^{(\alpha)}$. Chiar dacă acest ultim raport nu este un număr rațional, din matematică se ştie că orice număr irațional poate fi aproximat **oricât de bine** printr-un număr rațional.

2.8 CICLUL LUI CARNOT

Pentru determinarea funcției universale $f(T_1, T_2)$ vom discuta ciclul lui Carnot care funcționează cu o substanță ale cărei proprietăți le cunoştem bine: gazul ideal. Ciclul este format din patru ramuri: două izoterme(*AB* şi *CD*) şi două adiabate (*BC* şi *DA*). Fie T_1 temperatura pe izoterma *AB* şi T_2 temperatura pe izoterma *CD*. Este evident că $T_1 > T_2$ (vezi figura 2.9).

Deoarece în procesele adiabatice *BC* şi *DA* gazul perfect (adică fluidul de lucru al maşinii) nu schimbă căldură cu mediul înconjurător, putem scrie:

$Q = Q_{AB} + Q_{CD}$ în care $Q_{AB}(Q_{CD})$ joacă rolul lui $Q_1(Q_2)$ din discuția referitoare la teorema lui Carnot din paragraful precedent.

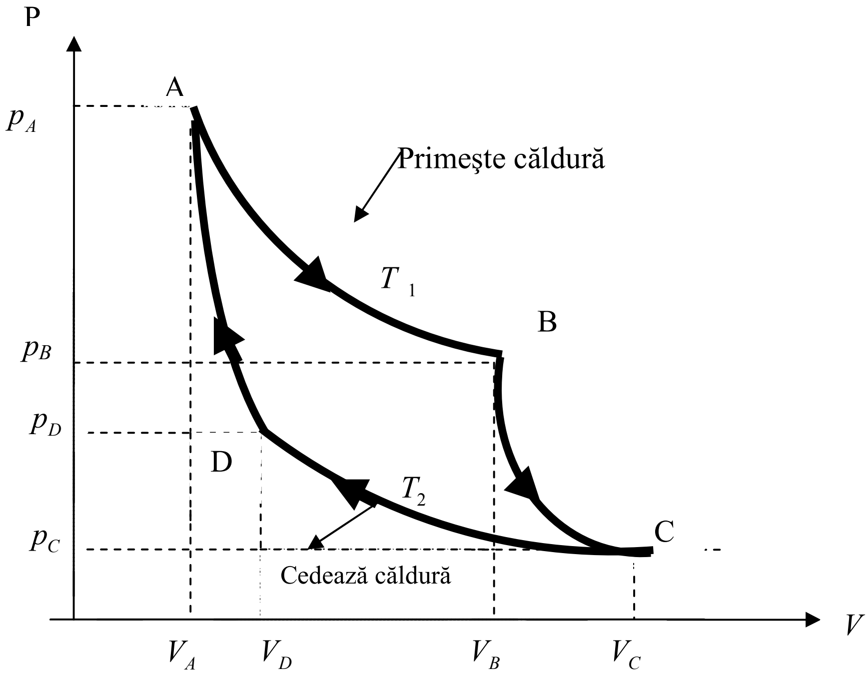


Fig. 2.9

Pentru evaluarea lui Q_{AB} şi Q_{CD} ne vom folosi de principiul întâi al termodinamicii, considerându-l pentru aceste procese finite, izoterme. Deoarece energia internă a gazelor perfecte depinde numai de temperatură (efect Joule), în procesele izoterme $(\Delta U)_{AB}$ şi $(\Delta U)_{CD}$ sunt zero şi principiul I ne dă:

$$0 = L_{AB} + Q_{AB} \qquad \text{şi} \qquad 0 = L_{CD} + Q_{CD}$$

unde

$$L_{AB} = \int_A^B \delta L = -\int_A^B p dV = RT_1 \int_{V_B}^{V_A} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

şi similar

$$L_{CD} = \int_C^D \delta L = -\int_{V_C}^{V_D} p dV = RT_2 \int_{V_D}^{V_C} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln\left(\frac{V_c}{V_D}\right)$$

Astfel obţinem:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} = \frac{-L_{CD}}{-L_{AB}} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{\ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)}$$

Eliminând presiunile între ecuaţiile celor patru procese care alcătuiesc ciclul:

$$\begin{vmatrix} p_A V_A = p_B V_B \\ p_C V_C = p_A V_D \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} p_B V_B^{\gamma} = p_c V_c^{\gamma} \\ p_D V_D^{\gamma} = p_A V_A^{\gamma} \end{vmatrix}$$

obținem ușor $\left(\frac{V_C}{V_D}\right) = \left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{-1}$ și în final:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(T_1, T_2) = -\frac{T_2}{T_1}$$

În acest fel forma funcției universale $f(T_1, T_2)$ a fost determinată și pentru procesele ciclice, reversibile, biterme putem scrie în general:

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} < 1. \tag{2.53}$$

De aici rezultă imediat:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \tag{2.54}$$

Mărimile de forma *Q/T* poartă denumirea de **călduri reduse** și relația (2.54) ne spune că **în orice proces ciclic, reversibil, biterm suma căldurilor reduse** (corespunzând celor două termostate) **este egală cu zero.**

2.9 PROCESE CICLICE, REVERSIBILE, POLITERME. ENTROPIA

Ne propunem acum să generalizăm rezultatul obținut la sfârșitul paragrafului anterior. Să considerăm în acest scop *n* termostate de temperaturi T_i, $i=\overline{1,n}$ și un sistem (α) care suferă o transformare ciclică, reversibilă în timpul căreia este în contact cu toate cele n termostate. Fie Q_i, $i = \overline{1,n}$ cantitățile de căldură schimbate într-un ciclu, cu termostatele T_i.

Să mai introducem un termostat auxiliar fictiv, de temperatură T_0 și să presupunem că sistemul nostru (α) poate fi subdivizat (desigur mintal !) în *n* substeme (α_i), $i = \overline{1,n}$. Această subdivizare nu se face oricum ci astfel ca subsistemul (α_i) să schimbe căldură numai cu termostatul T_i și această căldură schimbată (cu (T_i)) să fie chiar Q_i (adică căldura schimbată cu T_i de întreg sistemul (α)). Presupunem că fiecare sistem suferă o transformare ciclică reversibilă bitermă, schimbând căldura Q_i cu termostatul corespunzător, și cu termostatul T_0 căldura Q_i° astfel încât în ansamblu procesul ciclic reversibil, politerm să fie echivalent cu setul de n procese ciclice reversibile biterme.

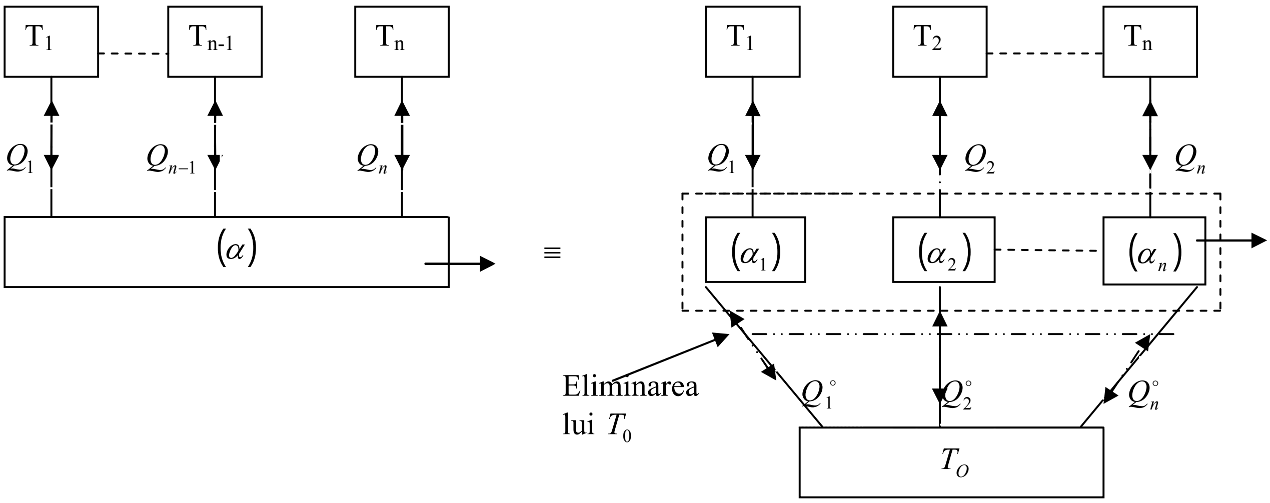


Fig.2.10

Pentru fiecare proces ciclic reversibil biterm putem scrie: $\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_i^o}{T_0}=0$, $i=\overline{1,n}$

şi însumând:

$$\sum_{i=i}^{n}\frac{Q_i}{T_i}+\frac{1}{T_O}\cdot\sum_{i=1}^{n}Q_i^o=0$$

Deoarece termostatul T_0 este **fictiv** îl eliminăm din discuţia noastră impunând condiţia $\sum_{i=1}^{n}Q_i^0=0$. Astfel rezultă pentru procesul ciclic: $$\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{T_i}=0 \qquad (2.55)$$

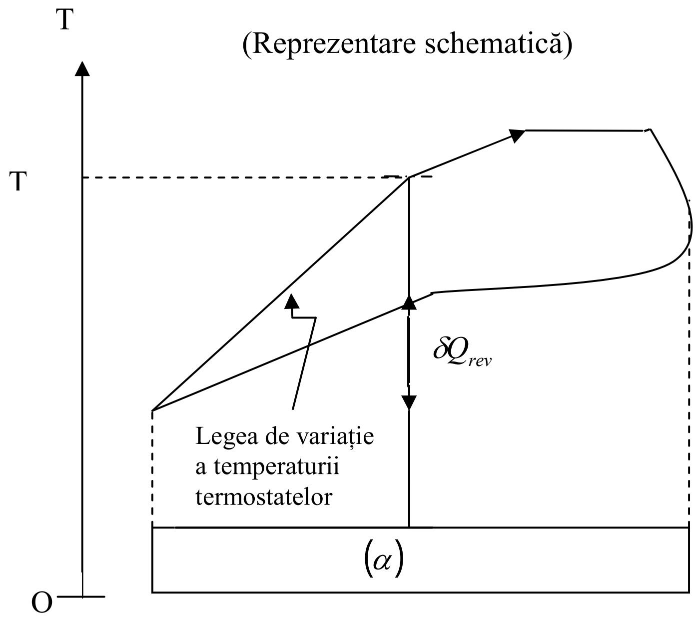


Fig.2.11

Dacă presupunem acum că sistemul este în contact cu o infinitate de termostate, ale căror temperaturi variază nu discret ca până acum ci continuu (vezi fig.2.11) relația (5.59) trebuie scrisă sub forma:

$$\oint_{ciclu} \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0 \tag{2.56}$$

Aici am indicat explicit faptul că este vorba despre o transformare reversibilă, cercul de pe semnul integrală precizând că transformarea este şi ciclică

Relația (2.56) nu poate fi satisfăcută decât dacă integrandul este o diferențială totală exactă. Vom scrie deci:

$$\frac{\delta Q_{rev}}{T} = dS\,, \tag{2.57}$$

funcția S astfel introdusă purtând denumirea de **entropia sistemului**. Ca şi energia internă *U*, entropia *S* este şi ea o funcție de stare, definită până la o constantă arbitrară aditivă.

Pentru o transformare reversibilă deschisă, de la stare inițială *(i)* la o stare finală *(f)* putem scrie:

$$S_f - S_i = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{\delta Q_{rev}}{T}\,, \tag{2.58}$$

rezultatul fiind independent de drumul procesului.

Observație finală:

Entropia, ca funcție de stare, nu este definită decât pentru stările de echilibru. Această afirmație rezultă din definiția (2.57), relație care este valabilă numai pentru transformări reversibile (transformări care sunt înşiruiri continue de stări de echilibru).

CAPITOLUL 3
ELECTROMAGNETISM
3.1. INTERACȚIUNI ELECTROMAGNETICE. MĂRIMI DE STARE

Observarea atentă a naturii de către om i-a permis acestuia să pună în evidență existența unor interacțiuni cu peste douăzeci de ordine de mărime mai mari decât interacțiunile gravitaționale.

Sistemele suferă astfel de interacțiuni numai dacă în prealabil se modifică starea în urma unor solicitări mecanice (frecare, comprimare), optice (iluminare, iradiere cu raze X) sau termice (stabilirea unei diferențe de temperatură între două puncte ale sistemului). Modificarea parametrilor termodinamici de stare ai sistemului, în urma acestor solicitări, nu pot explica apariția unor interacțiuni aşa de puternice. De aceea se impune acceptarea ideii că în urma acestor solicitări, apare o modificare specifică a stării sistemului, numită *electrizare*.

Interacțiunile dintre corpurile electrizate, starea de electrizare fiind stabilizată în timp, se numesc *interacțiuni electrice*.

În cazul în care realizăm transferul stării de încărcare dintr-o regiune a sistemului într-o altă regiune, sau în cazul în care întreg sistemul suferă o deplasare pe toată durata acestor procese apare un nou tip ce interacțiune pe care o numim *interacțiune magnetică*.

Deoarece stabilizarea spațio-temporală a stării de electrizare practic nu poate fi realizată, cele două tipuri de interacțiuni vor fi prezente simultan, constituind împreună *interacțiunile electromagnetice.*

Studiul interacțiunilor electromagnetice a arătat că acestea se propagă din aproape în aproape (prin contiguitate) şi cu viteză finită, egală cu viteza luminii în mediul respectiv. Suportul material care asigură transmiterea acestor interacțiuni în spațiu, ocupat sau neocupat de substanță, îl constituie *câmpul electromagentic*, o nouă formă a materiei.

Teoria macroscopică a fenomenelor electromagentice foloseşte şase mărimi primitive şi anume: sarcina electrică *q,* momentul electric $\vec{p}$, intensitatea curentului de conducție *I,* momentul magnetic $\vec{m}$, intensitatea câmpului electric în vid $\vec{E}$ şi inducția magentică în vid $\vec{B}$. Dintre acestea, primele patru caracterizează starea electromagnetică a corpurilor, iar ultimele două caracterizează starea câmpului electromagnetic. Sarcina electrică, momentul electric şi intensitatea curentului electric de conducție sunt mărimi de stare electrică, iar momentul magnetic şi inducția magnetică în vid sunt mărimi de stare magnetică a corpurilor. Intensitatea câmpului electric în vid este o mărime de stare electrică a câmpului electromagnetic, iar inducția magentică în vid este o mărime de stare magnetică.

3.2. REGIMUL STATIC (ELECTROSTATICA)

3.2.1 Sarcina electrică şi câmpul electric în vid

Regimul *static* caracterizează prin constanța în timp a tuturor mărimilor electrice de stare, sistemul care formează corpurile încărcate electric fiind fixat în spațiu. Interacțiunea între corpurile încărcate electric se caractrerizează prin forțe, momente, sau şi forțe, şi momente. *Sarcina electrică q* reprezintă mărimea de stare prin care determinăm starea corpurilor electrizate şi se măsoară în coulombi *(C).*

Analiza unui număr mai mare de experiențe efectuate cu corpuri încărcate electric a condus la stabilirea următoarelor propietăți generale ale sarcinilor electrice.

1) Corpurile încărcate electric se împart în două clase. Corpurile care fac parte din aceeaşi clasă se resping, iar cele care fac parte din clase diferite se atrag. Existența a două clase de corpuri încărcate electric arată că există două feluri de sarcini, convențional numite *pozitivă* (+) şi *negativă* (-)
2) Sarcina electrică are un caracter aditiv. În particular, transferul unei sarcini q_1 pe un corp încărcat cu o sarcină q_2 îi măreşte sarcina acestuia la $q_1+ q_2$, iar punerea în contact a două corpuri având sarcini egale, dar de semne contrare, duce la anularea sarcinilor.
3) În cazul unui sistem izolat de orice acțiune electrică exterioară, sarcina totală a sistemului rămâne constantă în timp, aceasta constituind *legea conservării sarcinii electrice.*
4) Într-un mediu omogen, două corpuri considerate punctiforme, aflate în repaus, care au sarcinile q_1 =const. şi q_2 =const., intereacționează între ele, printr-o forță dată de *legea lui Coulomb*:

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_0^3}\cdot\vec{r}_0 \tag{3.1}$$

unde k este o constantă care depinde de natura mediului în care se află cele două corpuri.

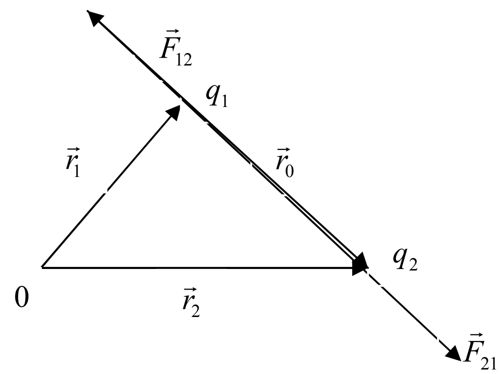


Fig. 3.1

În sistemul *SI,* $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$

unde ε se numeşte *permitivitatea mediului* şi este o constantă de material care caracterizează mediul din punct de vedere electric. Permitivitatea vidului ε_0 are valoarea $8{,}854\cdot10^{-1}$ farad/metru(F/m).

Permitivitatea ε a unui mediu izotrop este un scalar şi se determină de obicei în raport cu aceea a vidului ε_0, obținându-se în acest fel *permitivitatea relativă* ε_r. Deoarece

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{3.2}$$

permitivitatea relativă este o mărime adimensională şi este egală cu unitatea pentru vid.

Mărimea r_0 în legea lui Coulomb (3.1) reprezintă distanța dintre cele două corpuri electrizate, iar vectorul $\vec{r}_0$ se poate exprima cu ajutorul vectorilor de poziție $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$ (fig.3.1)

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{3.3}$$

Din (3.3) şi (3.1) rezultă: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

adică interacțiunea dintre corpurile electrizate este reciprocă, forțele respective fiind egale în modul şi având sensuri contrare.

Legea lui Coulomb încetează de a fi valabilă dacă una sau cealaltă din sarcini variază în timp, deci de îndată ce are loc un proces de propagare.

Experimental, se constată că forța care se exercită în vid asupra unui mic corp electrizat (corp de probă), aflat în vecitătatea unor corpuri încărcate electric, este egală cu produsul dintre sarcina electrică a acestuia şi o mărime vectorială, independentă de starea corpului de probă; mărimea vectorială respectivă depinde numai de poziția în spațiu a corpului de probă şi de starea sistemelor fizice exterioare şi se numeşte *intensitatea câmpului electric* $\vec{E}$: $\vec{F} = q\vec{E}$

Aşadar, intensitatea câmpului electric dintr-un punct al spaţiului este vectorul $\vec{E}$, definit prin ecuaţia:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{3.4}$$

unde $\vec{F}$ este forţa electrică, iar q este sarcina electrică aflată în acel punct, în cazul nostru, sarcina corpului de probă.

Sarcina corpului de probă poate să perturbe câmpul $\vec{E}$ dacă nu are o valoare suficient de mică. Ideal ar fi ca valoarea acestei sarcini să tindă la zero. În acest caz, intensitatea câmpului (3.4) se calculează printr-o operaţie de trecere la limită:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \tag{3.5}$$

Procesul de trecere la limită definit de relaţia (3.5) are sens fizic (experimental), numai dacă admitem continuitatea sarcinii electrice şi a materiei, în sensul că aceasta se poate diviza oricât de mult.

Ipoteza continuităţii absolute a sarcinii electrice şi a materiei sunt ipoteze fundamentale pentru întreaga teorie macroscopică (fenomenologică) a interacţiunilor electromagnetice.

Din (3.1) şi (3.5), ţinând seama de (3.3), rezultă că expresia intensităţii câmpului electric în vid, produs de o sarcina *q,* este:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_1\right|^2} \tag{3.6}$$

$\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$ fiind vectorul de poziţie al punctului în care calculăm câmpul, respectiv al sarcinii care creează câmpul.

În cazul unei discuţii *discrete* de sarcini punctiforme, în virtutea principiului suprapunerii câmpurilor, extins şi la câmpurile electromagnetice, câmpul creat de distribuţia dată într-un punct dat va fi:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3} \tag{3.7}$$

Distribuţia de sarcină cea mai întâlnită la corpurile macroscopice este distribuţia continuă, atât în volum τ al corpului, cât şi pe suprafaţa S a acestuia. În vederea caracterizării acestor distribuţii, se introduc două mărimi locale de stare: densitatea volumică de sarcină ρ şi densitatea superficială de sarcină σ. Prin definiţie, acestea sunt:

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{dq}{d\tau}, \text{ respectiv } \sigma = \lim_{S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \tag{3.8}$$

iar sarcina electrică totală obținută pe suprafața şi în volumul corpului dat va fi:

$$q = \int_\tau \rho d\tau + \int_S \sigma dS \tag{3.9}$$

Cu aceste precizări câmpul creat de o distribuție continuă de sarcini întu–un punct $P(\vec{r})$ va fi:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} d\tau' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \sigma(\vec{r}\,'') \frac{\vec{r} - \vec{r}\,''}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,''\right|^3} dS'' \tag{3.10}$$

elementul de volum $d\tau'$ fiind centrat la extremitatea lui $\vec{r}\,'$,iar elemntul de suprafață dS'' la extremitatea lui $\vec{r}\,''$ (fig. 3.2)

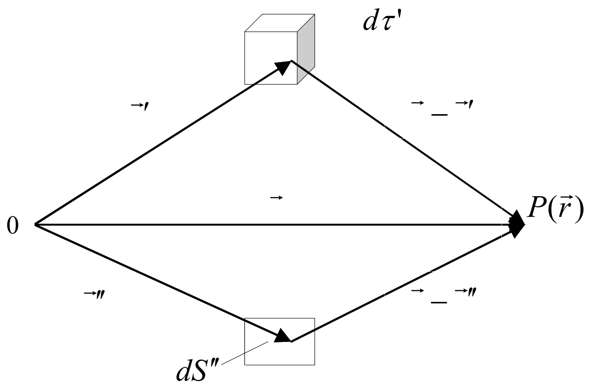


Fig.3.2

3.2.2 Potențialul electrostatic

Considerăm operatorul:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

pe care îl aplicăm funcției $\left|\frac{1}{\vec{r}}\right|$, unde $\vec{r} = \vec{x} + \vec{j}y + \vec{k}z$. Este uşor de arătat că:

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3} \text{ sau } \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_1\right|^3} = -\nabla\left(\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_1\right|}\right)$$

Înlocuind acest rezultat în expresia intensității câmpului (3.6) obținem:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right)$$

sau dacă introducem funcția scalară, definită prin relația:

$$V(\vec{r}) = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + const \tag{3.11}$$

şi facem convenția $V(\infty) = 0$, obținem:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}), \tag{3.12}$$

componentele intensității câmpului electrostatic fiind:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{şi } E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{3.13}$$

Funcția scalară $V(\vec{r})$ din care derivă intensitatea câmpului electrostatic se numeşte *potențial electrostatic.*

Relația (3.11) dă valoarea potențialului creat de sarcina q în punctul $P(\vec{r})$.
Pentru o distribuție discretă a sarcinii punctiforme, expresia potențialului devine:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}, \tag{3.14}$$

iar în cazul unei distribuții continue:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\tau' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma(\vec{r}'')}{|\vec{r}-\vec{r}''|}dS'' \tag{3.15}$$

Potențialul scalar are o semnificație fizică precisă, uşor de dedus din următorul raționament. Considerăm un corp punctiform, încărcat cu o sarcină q, pe care îl deplasăm în câmpul $\vec{E}$, împotriva forțelor câmpului. În acest caz, lucrul efectuat asupra corpului determină o creştere echivalentă a energiei potențiale:

$$W_2 - W_1 = -\int_{(1)}^{(2)} \vec{F}d\vec{l} = -q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}.$$

Înlocuind pe $\vec{E}$ din (3.12) obținem:

$$W_2 - W_1 = q\int_{(1)}^{(2)} \nabla V d\vec{l} = q\int_{(1)}^{(2)} dV = q(V_2 - V_1) \tag{3.16}$$

Deci produsul qV măsoară energia potențială a sarcinii q în punctul de potențial V, iar potențialul V într-un punct dat al câmpului $\vec{E}$ este echivalent cu energia potențială a sarcinii egală cu unitatea, plasată în acel punct.

3.2.3. Fluxul electric printr-o suprafață închisă. Teorema lui Gauss în vid

Considerăm o sarcină punctiformă q şi o suprafață S (Fig. 3.3). Prin definiție, fluxul câmpului electric produs de sarcina q prin suprafața S este:

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S \vec{E}\vec{n} dS \tag{3.17}$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei exterioare a elementului de arie dS. Plasând originea sistemului de referință în punctul în care se gaseşte sarcina, câmpul $\vec{E}$ dat de relația (3.6) se scrie:

$\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ Expresia fluxului devine:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\vec{r}\vec{n}}{r^3} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{dS\cos\theta}{r^2} \text{ sau: } \Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int d\Omega \tag{3.18}$$

$d\Omega$ fiind unghiul solid sub care se vede elementul de suprafață dS, din punctul în care se află sarcina q.

Rezultatul integrării relației (3.18) depinde de poziția sarcinii q față de suprafața S. Dacă q este în interiorul suprafeței şi dacă aceasta este închisă, valoarea integralei este 4π şi fluxul câmpului $\vec{E}$ prin S este: $\Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ sau $\displaystyle\int_S \vec{E}\vec{n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (3.19)

Dacă sarcina q este în exteriorul suprafeței închise S, rezultatul integrării, şi deci şi fluxul, este egal cu zero:

$$\Omega = 0 \text{ sau } \int_S \vec{E}\vec{n} dS = 0 \tag{3.20}$$

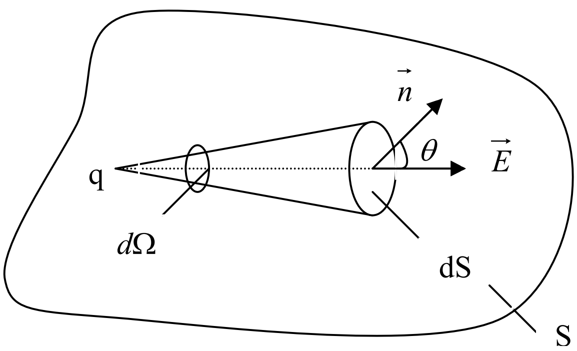


Fig. 3.3 Deci fluxul câmpului electrostatic printr-o suprafață închisă este egal cu valoarea sarcinii închise în interiorul

suprafeței, împărțită la ε_0. Dacă sarcina este în afara suprafeței S, fluxul este nul. Acest rezultat constituie *teorema lui Gauss* pentru fluxul câmpului electric printr-o suprafață închisă.

În cazul unei distribuții de volum a sarcinii electrice, dacă ținem seama de (3.17), (3.19) şi (3.9), expresia fluxului prin suprafața S se scrie:

$$\int_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_\tau \rho d\tau$$

Integrala din membru stâng poate fi transformată într-o integrală de volum, închis de suprafața S, cu ajutorul teoremei lui Gauss-Ostrogradschi:

$$\varepsilon_0 \int_\tau \nabla \vec{E} \cdot d\tau = \int_\tau \rho d\tau$$

Întrucât elementele de volum sunt arbitrare rezultă:

$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E} = \rho, \tag{3.21}$$

când distribuția de sarcini este în interiorul suprafeței *S* şi

$$\varepsilon_0 \nabla \vec{E} = 0, \tag{3.22}$$

când distribuția de sarcini se găseşte în afara suprafeței S. Relațiile (3.21) şi (3.22) constituie forma diferențială a teoremei lui Gauss, în vid.

Folosindu-ne de aceste date, să calculăm lucrul câmpului electrostatic pe un contur închis Γ. Acesta este dat de integrala curbilinie

$$\oint_\Gamma \vec{E} d\vec{l} = \oint_\Gamma \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = -\oint_\Gamma \nabla V \cdot d\vec{r} = -\oint_\Gamma dV = 0 \tag{3.23}$$

şi rezultă că este nul. Deci câmpul electrostatic este *conservativ.*

Aplicând teorema lui Stokes, rezultatul de mai sus se poate pune sub formă diferențială:

$$\oint_\Gamma \vec{E} d\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) d\vec{S} = \int_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) \vec{n} dS = 0 \text{ deci} \qquad \nabla \times \vec{E} = 0 \tag{3.24}$$

3.2.4. Câmpul unui dipol electric

Două sarcini punctiforme, egale ca mărime şi de sens contrar, situate la o distanță l una față de alta, formează un *dipol electric*. Caracterizăm dipolul electric prin *momentul electric dipolar*.

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l} \tag{3.25}$$

unde $\vec{l}$ este vectorul de poziție al sarcinii pozitive față de cea negativă (fig.3.4).

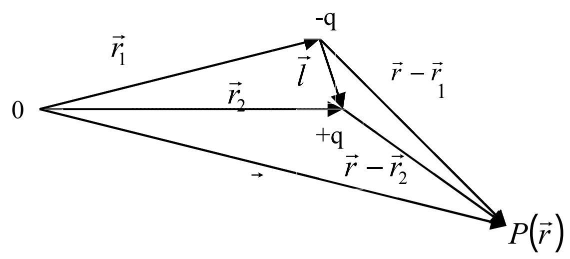


Fig. 3.4

Potențialul creat de câmpul dipolului în punctul $P(\vec{r})$, conform rezultatului stabilit prin relația (3.11), va fi:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right] \text{sau } V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1-\vec{l}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right] \qquad (3.26)$$

Deoarece l este mic față de r, dezvoltând în serie primul termen şi neglijând toți termenii care-l conțin pe l la o putere egală cu doi sau mai mare, se obține:

$$\left(|\vec{r}-\vec{r}_1-\vec{l}|\right)^{-1} = \left[(\vec{r}-\vec{r}_1)^2 - 2(\vec{r}-\vec{r}_1)\vec{l} + \vec{l}^{\,2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\left[1 + \frac{(\vec{r}-\vec{r}_1)\vec{l}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2} + \cdots\right] \approx \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} - \vec{l}\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right)$$

Înlocuind acest rezultat în (3.26), obținem relația care ne dă *potențialul dipolului*:

$$V(\vec{r}) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right) = \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\nabla^{(1)}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}\right) \qquad (3.27)$$

unde:

$$\nabla^{(1)} = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y_1} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z_1}$$

Câmpul electric al unui dipol de moment $\vec{p}$ se poate calcula cu ajutorul relației (3.12).

3.2.5. Momentul electric.
Intensitatea de polatizare electrică

Până în prezent ne-am referit numai la interacțiunile determinate de sarcinile electrice distribuite pe suprafața sau în volumul corpurilor în vid. O singură dată, şi anume la stabilirea legii lui Coulomb, am arătat că mediul influențează aceste interacțiuni. Participarea mediului am luat-o în considerare prin permitivitatea ε, care în cazul unui mediu omogen şi izotrop, este constantă. Experiența arată că influența mediului asupra interacțiunilor electrice este mai complexă , mai ales atunci când mediul nu este nici omogen şi nici izotrop.

Studiul comportării dielectricilor în câmpuri electrice, cât şi influenţa lor asupra interacţiunilor electrice pleacă de la următoarea constatare experimentală: o substanţă dielectrică introdusă într-un câmp electric exterior se polarizează, adică atât în volumul cât şi pe suprafaţa ei apar sarcini electrice numite *sarcini de polarizare*. Un câmp electric omogen acţionează asupra dialectricului polarizat printr-un cuplu, iar un câmp neomogen acţionează printr-un cuplu şi o forţă.

Faptele experimentale prezentate mai sus se pot explica admiţând că orice dielectric, conţine dipoli microscopici şi uniform distribuiţi în volumul dielectricului. Un câmp electric exterior face ca sarcinile pozitive să se deplaseze în sensul lui, iar cele negative în sens invers. Acest fenomen este prezent în tot corpul, orice element de volum $d\tau$ comportându-se ca un mic dipol (fig. 3.5)

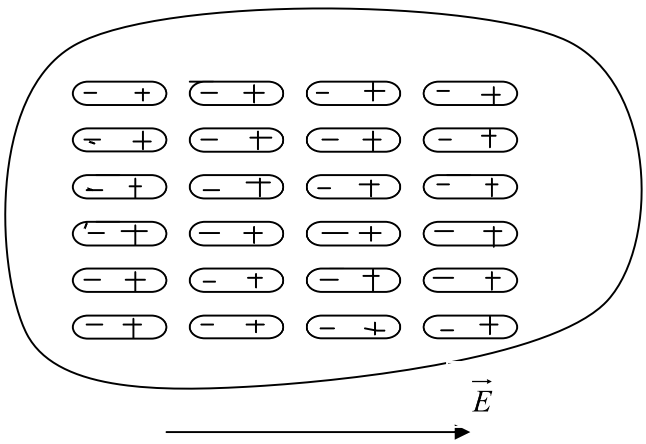


Fig. 3.5

Din cele prezentate mai înainte a rezultat că asupra unui corp macroscopic polarizat electric, un câmp electric exterior acţionează printr-o forţă $\vec{F}$ şi un cuplu $\vec{C}$. Aceeaşi acţiune se exercită asupra oricărui element de volum, considerat corp mic, polarizat.

Starea electrică a unui corp polarizat electric este caracterizată printr-o mărime vectorială $\vec{p}$, numită *momentul electric* al corpului respectiv. Momentul electric este univoc definit prin expresiile forţei $\vec{F}$ şi a cuplului $\vec{C}$ exercitate de un câmp electric $\vec{E}$ asupra corpului:

$$\vec{F} = \nabla\left(\vec{p} \cdot \vec{E}\right) \tag{3.28}$$

şi

$$\vec{C} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{3.29}$$

corpul fiind în repaus.

Dacă mometul electric al unui element de volum $\Delta\tau$ este $\Delta\vec{p}$, atunci corpul poate fi caracterizat, din punct de vedere macroscopic, prin momentul electric al unității de volum:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} \tag{3.30}$$

care se numeşte *intensitate de polarizare electrică* sau *polarizație electrică.*

Intensitatea de polarizare $\vec{P}$ are ca principal efect faptul că în prezența unei substanțe, intensitatea câmpului electric diferă de intensitatea câpului creat de aceleaşi sarcini în vid.

În vederea studierii modului în care o substanță polarizată influențează câmpul electric, vom calcula atât potențialul creat în vid de substanța respectivă, cât şi densitatea de volum şi respectiv, de suprafață, a sarcinilor de polarizare.

Momentul electric dipolar al elementului de volum $d\tau$, în baza relației (3.30), este:

$d\vec{p} = \vec{P} d\tau$ iar potențialul câmpului creat de acest element de volum în vid, considerat dipol elementar, conform relației (3.27) se scrie:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\vec{P} \cdot \nabla^{(1)} \left(\frac{1}{\left| \vec{r} - \vec{r}_1 \right|} \right) \right] d\tau^{(1)} \tag{3.31}$$

Potențialul câmpului creat de întregul corp se obține integrând relația (3.31):

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \vec{P}(\vec{r}_1) \cdot \nabla^{(1)} \left(\frac{1}{\left| \vec{r} - \vec{r}_1 \right|} \right) d\tau^{(1)} \tag{3.32}$$

Utilizând relația:

$\nabla(s\vec{v}) = s \cdot \nabla\vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla s$,

cunoscută din analiza vectorială şi luând

$s = \dfrac{1}{\left| \vec{r} - \vec{r}_1 \right|}$ şi $\vec{v} = \vec{P}$, relația (3.32) se poate scrie:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{\left(-\nabla\vec{P}\right)}{\left| \vec{r} - \vec{r}_1 \right|} d\tau^{(1)} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \nabla \left(\frac{\vec{P}}{\left| \vec{r} - \vec{r}_1 \right|} \right) d\tau^{(1)} \tag{3.33}$$

Aplicând teorema lui Gauss-Ostrogradski integralei din termenul al doilea al relației (3.33), obținem expresia potențialului creat în vid de către un corp polarizat electric:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{\left(-\nabla\vec{P}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d\tau^{(1)} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\vec{P}\cdot\vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} dS^{(1)} \tag{3.34}$$

Comparând relațiile (3.34) şi (3.15), $\left(-\nabla\vec{P}\right)$ se poate interpreta ca fiind densitatea de volum a sarcinilor de polarizare şi $\left(\vec{P}\cdot\vec{n}\right)$ ca densitatea de suprafață a sarcinilor de polarizare, adică:

$$\rho_P = -\nabla\vec{P} \tag{3.35}$$

şi

$$\sigma_P = \vec{P}\cdot\vec{n} \tag{3.36}$$

Câmpul produs de substanța polarizată poate fi considerat ca fiind câmpul generat de sarcinile de volum ρ_P şi de cele de suprafață σ_P, care apar în interiorul, respectiv pe suprafața corpului, în urma polarizării acestuia.

În cazul unui câmp electric exterior şi al unui mediu omogen şi izotrop, intensitatea de polarizare este aceeaşi în orice punct al corpului, ceea ce implică: $\rho_P = -\nabla\vec{P} = 0$. Deci, în acest caz nu apar sarcini de polarizare în interiorul mediului, ci numai pe suprafața de separare a acestuia de mediul exterior.

3.2.6. Vectorul inducție electrică.
Teorema lui Gauss în medii dielectrice

Considerăm un sistem de sarcini $q_1, q_2, ... q_n$ ale unor corpuri aflate într-un mediu dielectric de volum τ, limitat de suprafața închisă S (Fig. 3.6). Deci în volumul τ, vom avea sarcina $q = q_1 + q_2 + ... + q_n$. În afara acestor sarcini, datorită polarizării dielectricului, sub influența câmpului creat de sarcinile $q_1 .... q_n$, apare sarcina de polarizare q_P a cărei valoare este:

$$q_P = \int_{S'} \vec{P}\cdot\vec{n}' dS' + \int_\tau \left(-\nabla\vec{P}\right) d\tau \tag{3.37}$$

În scrierea relației (3.37), s-au avut în vedere realațiile (3.9), (3.35) şi (3.36), iar S' reprezintă totalitatea suprafețelor de discontinuitate, unde apar sarcini superficiale, adică:

$$S' = S_1' + S_2' + \dots\dots\dots + S_n'$$

Integrala a doua din expresia (3.37) se poate transforma într-o integrală de suprafață cu ajutorul teoremei lui Gauss-Ostrogradski:

$$-\int_{\tau} \nabla \vec{P} \cdot d\tau = -\int_{S} \vec{P} \cdot ndS - \int_{S'} \vec{P} \cdot \vec{n}'dS' \qquad (3.38)$$

integrala extinzându-se atât asupra suprafeței *S*, cât şi asupra tuturor suprafețelor de discontinuitate *S'*.

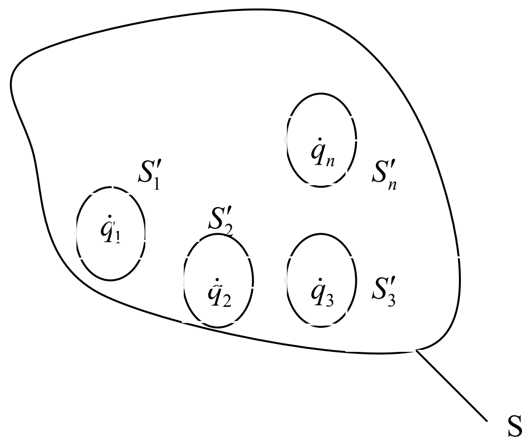


Fig.3.6

Din (3.37) şi (3.38) rezultă:

$$q_P = \int_{S} \vec{P} \cdot \vec{n}dS, \qquad (3.39)$$

q_P fiind sarcina de polarizare indusă de câmpul sarcinilor $q_1 \dots\dots\dots\dots q_n$.

Câmpul electric din mediul dielectric se poate considera ca fiind rezultatul suprapunerii câmpurilor create în vid de către sarcinile electrice $q_1 \dots\dots q_n$ şi de sarcinile de polarizare q_P. În acest caz, teorema lui Gauss se poate scrie sub forma:

$$\int_{S} \vec{E} \cdot \vec{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q + q_P\right)$$

Înlocuind sarcina de polarizare q_P cu valoarea sa dată de (3.39) obținem:

$$\int_{S} \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right) \vec{n}dS = q \qquad (3.40)$$

Relația (3.40) permite introducerea unui nou vector câmp $\vec{D}$, numit *inducție electrică*:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad (3.41)$$

Cu ajutorul vectorului $\vec{D}$, terorema lui Gauss (3.40) devine:

$$\int_{\tau} \nabla\vec{D}\cdot\vec{n}dS = q \tag{3.42}$$

deci fluxul inducției electrice este determinat numai de sarcinile $q_{1,}q_2,................q_n$ a căror sumă este q.

În cazul unor distribuții continue de sarcini, sarcina q este dată de (3.9). După ce aplicăm teorema divergenței, relația (3.42) se scrie: $\int_{\tau}\nabla\vec{D}\cdot d\tau = \int_{\tau}\rho\cdot d\tau$

de unde rezultă forma diferențială a teoremei lui Gauss: $\nabla\vec{D} = \rho$ (3.43)

Teorema lui Gauss în medii dielectrice ne arată că asupra fluxului inducției electrice, sarcinile de polarizare nu au nici o influență. Din acest motiv, vectorul $\vec{D}$ are o deosebită importanță în descrierea câmpului electric. Dacă intensitatea câmpului $\vec{E}$ caracterizează câmpul din punct de vedere al efectelor câmpului, adică al forțelor care acționează în câmp, vectorul $\vec{D}$ este în strânsă legatură cu cauza care generează câmpul, adică cu sarcina electrică.

Deoarece sarcinile de polarizare nu influențează fluxul vectorului $\vec{D}$, este evident că nici neomogenitățile mediului nu vor avea vreo influență, deci relația (3.43) este valabilă atât pentru mediile omogene, cât şi pentru cele neomogene. Relația (3.43) este o relație "locală" şi aparține teoriei acțiunilor prin contiguitate.

Plecând de la aceste constatări, Maxwell generalizează valabilitatea teoremei lui Gauss şi la regimul variabil, aşezând-o ca un postulat la bazele electrodinamicii fenomenologice.

3.2.7. Mărimi electrice de material

Am văzut că un dielectric introdus într-un câmp electric se polarizează. Experimental, s-a stabilit că pentru o clasă mare de dielectrci, intensitatea de polarizare $\vec{P}$ este proporțională cu $\vec{E}$, având aceeaşi direcție şi acelaşi sens:

$$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E} \tag{3.44}$$

În afara dielectricilor care polarizează şi păstrează starea de polarizare numai în câmp, există dielectrici care prezintă o polarizare permanentă sau care păstrează starea de polarizare un anumit timp.

Mărimea χ_e din relația (3.44) se numeşte *susceptivitate electrică* şi pentru mediile izotrope, este o mărime scalară. În cazul acestor medii, dacă se înlocuieşte intensitatea de polarizare din (3.44) în expresia inducției electrice (3.41), se obține:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \tag{3.45}$$

sau

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \tag{3.46}$$

după ce am făcut substituția:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e), \tag{3.47}$$

ε fiind permitivitatea mediului.

Din (3.2) şi (3.47) rezultă legătura dintre permitivitatea relativă ε_r şi susceptivitatea respectivă:

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \tag{3.48}$$

Pentru mediile anizotrope dar liniare, atât susceptivitatea χ_e, cât şi permitivitatea ε sunt mărimi tensoriale, componentele intensității de polarizare $\vec{P}$ fiind funcții liniare de componentele câmpului electric $\vec{E}$, adică:

$$P_x = \varepsilon_0 \left(\chi^e_{xx} E_x + \chi^e_{xy} E_y + \chi^e_{xz} E_z \right),$$

$$P_y = \varepsilon_0 \left(\chi^e_{yx} E_x + \chi^e_{yy} E_y + \chi^e_{yz} E_z \right),$$

$$P_z = \varepsilon_0 \left(\chi^e_{zx} E_x + \chi^e_{zy} E_y + \chi^e_{zz} E_z \right).$$

Mărimea tensorială reprezentată prin matricea:

$$\left(\chi^e \right) = \begin{pmatrix} \chi^e_{xx} \chi^e_{xy} \chi^e_{xz} \\ \chi^e_{yx} \chi^e_{yy} \chi^e_{yz} \\ \chi^e_{zx} \chi^e_{zy} \chi^e_{zz} \end{pmatrix}$$

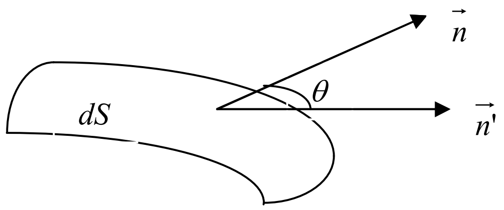
se numeşte *tensorul susceptivitate electrică*.

3.3 REGIMUL STAȚIONAR (ELECTROCINETICA)

3.3.1. Intensitatea curentului electric.

Considerăm două corpuri metalice încărcate electric, cu potențiale diferite. Dacă realizăm contactul între ele prin intermediul unui al treilea corp, neutru din punct de vedere electric, constatăm transferul stării de încărcare de la corpul cu potențialul mai mare spre corpul cu potențial mai mic. Transferul de sarcină durează până la atingerea stării de echilibru.

Corpul de legătură prin care se realizează instantaneu echilibrul între cele două corpuri se numeşte *conductor ideal*. Corpul de legătură care determină realizarea echilibrului într-un timp infinit se numeşte *izolant ideal*. Toate celelalte materiale care determină timpi de relaxare a



e

Fig. 3.7

chilibrului finiţi formează trei clase: clasa conductorilor reali, a semiconductorilor, şi a izolanţilor reali.

Transferul de sarcină prin intermediul unui mediu conductor presupune deplasarea (mişcarea) dirijată a unor purtători microscopici de sarcină electrică în acel mediu. Orice deplasare dirijată a sarcinii electrice se numeşte curent electric. Curentul electric care se obţine prin deplasarea sarcinilor libere în medii conductoare se numeşte *curent de conducţie*. Deplasarea unui corp microscopic încărcat electric (conductor sau izolant) dă naştere, de asemenea, unui curent electric; acest curent se numeşte *curent de convecţie*.

În cele ce urmează, ne vom ocupa numai de curenţii care au atins un regim permanent *staţionar*, caracterizat prin aceea că în unitatea de timp, la orice moment, prin secţiunea normală a conductorului este transferată aceeaşi sarcină.

În electrodinamica macroscopică, intensitatea curentului de conducţie se defineşte drept câtul dintre sarcina dq transferată într-un interval de timp dt, printr-o secţiune normală a unui conductor şi durata dt: $I = \dfrac{dq}{dt}$:

Densitatea de curent este o mărime locală de stare care caracterizează curentul de conducţie. Dacă $\vec{n}'$ este versorul direcţiei de transfer maxim al stării de încărcre prin elemntul de arie dS (3.7), densitatea curentului de conducţie este, prin definiţie,

$$\vec{i} = \frac{dq}{d\vec{S} \cdot \vec{n}' \cdot dt}\vec{n}' \qquad (3.49)$$

dq fiind sarcina transferată în intervalul de timp dt.

Deoarece $\vec{n}' \cdot \vec{n} = \cos\theta$, iar $dS\cos\theta = dS_n$ şi dacă notăm cu $d\vec{r} = \vec{n}'\, dr$ elementul de deplasare pe direcţia de transfer a sarcinii dq, după ce înmulţim relaţia (3.49) cu dr, obţinem:

$$\vec{i} = \frac{dq}{dS_n \cdot dr}\frac{d\vec{r}}{dt} = \rho \cdot \vec{v} \qquad (3.50)$$

adică densitatea curentului de conducție reprezintă produsul dintre densitatea volumică de sarcină şi viteză macroscopică de transfer a sarcinilor electrice. Se numesc *linii de curent* curbele tangente în fiecare punct la direcția locală a vectorului densitate de curent.

Observând că fluxul densității de curent prin secțiunea conductorului este chiar intensitatea curentului, putem scrie:

$$I = \int_S \vec{i} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS \tag{3.51}$$

Într-un mediu conductor, nu există transfer de sarcină fără un transfer simultan de masă, deoarece sarcina electrică ca mărime de stare caracterizează obligatoriu un sistem fizic. Microscopic, acest sistem îl formează purtătorii de sarcină şi în primul rând, electronii, particule care au atât masă, cât şi sarcină. Dacă notăm cu dm masa care trece prin elementul de suprafață dS, în intervalul de timp dt pe direcția de transfer maxim a substanței, de versor $\vec{n}'$, atunci densitatea fluxului de masă $\vec{i}_m$ este:

$$\vec{i}_m = \frac{dm}{\vec{n}'\vec{n}dSdt}\vec{n}' \tag{3.52}$$

care se mai poate pune sub forma:

$$\vec{i}_m = \rho_m \vec{v}, \tag{3.53}$$

ρ_m fiind densitatea de masă, iar $\vec{v}$ viteza macroscopică de transfer al fluxului de masă, egală cu viteza macroscopică de transfer a sarcinilor electrice. Relația (3.52) permite calculul cantității de substanță care trece (eventual se depune) prin suprafața S în timpul t:

$$m = \int_S \vec{i}_m \vec{n} dSdt$$

O relație analogă cu (3.50) şi (3.53) se poate stabili şi pentru curentul de convecție şi anume:

$$\vec{i}_c = \rho \cdot \vec{u}$$

unde $\vec{i}_c$ este densitatea curentului de convecție, iar ρ este densitatea de volum a sarcinilor corpului care se mişcă cu viteza $\vec{u}$.

3.3.2 Ecuația de continuitate a curentului electric

Ne propunem în continuare să găsim şi o altă relație decât (3.50), între densitatea de curent $\vec{i}$ şi densitatea volumică de sarcină ρ. Pentru aceasta, vom ține seama de faptul că sarcina electrică se conservă şi în cazul transferului acesteia, adică în cazul curenților care se stabilesc în cadrul sistemului.

Considerăm o suprafață închisă S în interiorul unui mediu, în care are loc un transfer de sarcini electrice. În virtutea legii conservării sarcinii electrice, putem afirma că variația sarcinii electrice din interiorul suprafeței, care se produce într-un interval de timp dt, este egală cantitativ cu sarcina transferată prin suprafața S, în intervalul de timp:

$$-dq_{\text{int}} = dq_{tr} = Idt \text{ sau } \frac{dq_{\text{int}}}{dt} + I = 0$$

unde I reprezintă intensitatea totală a curenților care trec prin suprafața S.

Intensitatea I este egală cu:

$$I = \int_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = \int_\tau \nabla \vec{i} \cdot d\tau,$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei exterioare a suprafeței S, iar τ este volumul mărginit de suprafața S. Sarcina electrică cuprinsă în acest volum are valoarea:

$$q_{\text{int}} = \int_\tau \rho \cdot d\tau.$$

Rezultă:

$$\frac{dq_{\text{int}}}{dt} + \int_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = 0 \text{ sau : } \qquad \frac{d}{dt}\int_\tau \rho \cdot d\tau + \int_\tau \nabla \vec{i} \cdot d\tau = 0$$

Efectuând operația de derivare, se obține egalitatea:

$$\int_\tau \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{i} \right) \cdot d\tau = 0$$

Această egalitate este valabilă pentru orice volum τ, ceea ce atrage după sine că integrantul trebuie să fie identic nul:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \vec{i} = 0. \qquad (3.54)$$

Relația (3.54) se numeşte *ecuația de continuitate a curentului electric* sau *ecuația de conservare a sarcinii electrice*.

Regimul electromagnetic staționar este definit ca fiind regimul pentru care în orice punct, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$

În consecință, pentru curenții electrici staționari,

$$\nabla \vec{i} = 0 \text{ sau } \int_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS = 0, \tag{3.55}$$

pentru orice suprafață închisă S.

Relația (3.55) arată că liniile de curent nici nu pleacă şi nici nu se strâng în anumite puncte. Într-adevăr, dacă ar exista asemenea puncte şi dacă s-ar alege o suprafață de rază tinzând către zero, în jurul acestor puncte, $\int_S \vec{i} \cdot \vec{n} dS \neq 0,$ deci şi $\nabla \vec{i} \neq 0,$ ceea ce contrazice realția (3.55). Înseamnă că liniile de curent ale curenților staționari sunt curbe închise.

3.3.3 Legea lui Ohm.
Tensiunea electromotoare

Experimental, se constată existența următoarei relații între diferența de potențial $V_2 - V_1$ şi intensitatea I a curentului printr-un conductor omogen:

$$V_2 - V_1 = RI \tag{3.56}$$

unde *R*, în cazul unui conductor cilindric de secțiune constantă *S* şi de lungime *l*, are forma:

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{S} \tag{3.57}$$

Aici σ este o mărime de material şi se numeşte *conductivitat*e, iar $\frac{1}{\sigma} = \rho$ este *rezistivitatea* materialului. Ca şi susceptivitatea χ_e, *conductivitatea* σ şi rezistivitatea ρ sunt mărimi scalare pentru mediile izotrope, iar în cazul mediilor anizotrope, sunt mărimi tensoriale.

Considerăm un element de volum cilindric de secțiune *S* şi de lungime dl dintr-un mediu omogen şi izotrop, prin secținea *S* trecând un curent de intensitate I . Între fețele elementului de volum, diferența de potențial este dV şi deci, ținând seama de (3.56):

$$dV = IdR, \tag{3.58}$$

unde rezistența elementului de volum este

$$dR = \frac{1}{\sigma} \frac{dl}{S}, \text{ Rezultă: } i = \frac{I}{S} = \sigma \frac{dV}{dl} = \sigma E.$$

Deoarece purtătorii de sarcină se deplasează de-a lungul liniilor câmpului electric, putem scrie vectorial:

$$\vec{i} = \sigma \vec{E} \tag{3.59}$$

Relația (3.59) exprimă forma locală a legii lui Ohm, şi faptul că densitatea curentului de conducție este proporțională cu intensitatea câmpului electric $\vec{E}$, sub acțiunea căreia se transferă sarcina în conductor.

Menținerea unui curent permanent într-un circuit închis implică utilizarea unei surse de tensiune, care generează în permanență o forță care asigură mişcarea purtătorilor de sarcină electrică în conductor. Lucrul acestor forțe provine din variația energiei sursei într-un proces complex, cum ar fi: reacțiile chimice, fenomenele termoelectrice sau fotoelectrice etc.

Câmpul electric care ar asigura aceeaşi mişcare ca şi forțele neelectrice generate de sursa de tensiune se numeşte *câmp electric imprimat* $\vec{E}_i$ şi deci câmpul total $\overline{E}_t$, care acționează asupra purtătorilor de sarcină, se poate scrie:

$$\vec{E}_t = \vec{E} + \vec{E}_i$$

şi va determina forma generală a legii locale a lui Ohm:

$$\vec{i} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_i\right) \tag{3.60}$$

Circulația câmpului imprimat, pe conturul Γ al circuitului, este:

$$\mathsf{E} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \tag{3.61}$$

şi se numeşte *tensiune electromotoare.*

3.4. CÂMPUL MAGNETIC CONSTANT (MAGNETOSTATICA)

3.4.1 Câmpul magnetic al curentului electric

Ştim despre câmpul electric că se datorează simplei prezențe a sarcinilor electrice în spațiu, în timp ce câmpul magnetic se datorează mişcării acestor sarcini. Astfel, în jurul unui circuit rectiliniu parcurs de un curent constant, un ac magnetic, care are posibilitatea de a se roti într-un plan perpendicular față de circuit, se orientează pe direcția perpendiculară pe raza care uneşte circuitul cu punctul respectiv (fig. 3.8), iar sensul este dat de următoarea regulă, *a burghiului drept* : nordul indică sensul în care trebuie rotit burghiul drept pentru a se deplasa în sensul curentului. Făcând experiența cu un ac nemagnetic, dar dintr-un material magnetizabil, de expemplu din fier, nichel etc., acesta se orientează similar ca direcție, dar fără să existe un sens preferențial. Repetând experiența cu mai multe particule mici, de exemplu, pilitură de fier presărată pe un plan orizontal, traversat de un conductor vertical parcurs de un curent, aceasta se orientează în mod similar, formând linii circulare concentrice în jurul curentului. În plus, se constată ca liniile de pilitură se răresc în raport cu distanța față de circuit, ceea ce înseamnă că intensitatea câpului în jurul cuentului scade cu distanța. În concordanță cu ceea ce evidențiază pilitura de fier, se consideră că liniile câmpului magnetic al curentului electric rectiliniu sunt cercuri concentrice, pe care curentul le traversează perpendicular prin centru, iar sensul lor este cel indicat de nordul acului magnetic. Cu alte cuvinte, într-un punct oarecare, vectorul câmpului magnetic al curentului rectiliniu este tangent la cercul care trece prin acest punct şi este traversat perpendicular, prin centru, de către curent, sensul fiind dat de regula *burghiului drept*.

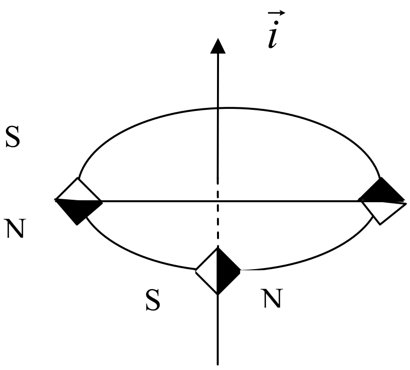


Fig. 3.8

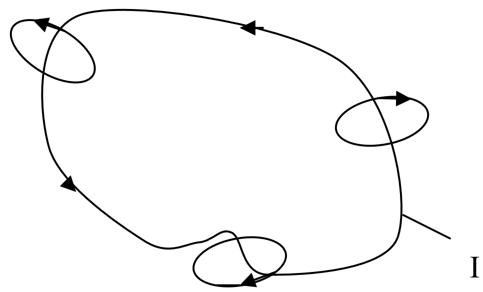


Fig. 3.9

Liniile de câmp ale unui curent curbiliniu arbitrar, care de asemenea pot fi evidențiate cu ajutorul piliturii de fier, sunt rezultante fireşti ale liniilor concentrice ale porțiunilor de curent suficient de scurte pentru a putea fi considerate rectilinii. În particular, o buclă de curent (spiră) are liniile ieşind pe o parte, fața de *nord* şi intrând pe cealtă parte, fața de *sud* , pentru a se închide (fig. 3.9). Spira de curent este astfel echivalentă din punct de vedere magnetic cu o felie de magnet , "foiță magnetică" - cum a fost numită de A. M. Ampère, cel care a observat prima oara acest fenomen. În mod firesc, curentul care parcurge un solenoid, privit ca o succesiune de spire coaxiale, este echivalent cu o bară magnetică, aceasta fiind în fond o reuniune de foițe magnetice paralele.

Magneții naturali au fost cunoscuți încă din antichitate. Explicarea magnetismului a fost dată de-abia în secolul al XIX-lea de către Ampère, care a ajuns la concluzia că acesta se datoreşte curenților microscopici. Curentul "amperic" (sau molar) este asociat mişcării pe orbite închise de dimensiuni submoleculare, sau de rotație în jurul axelor proprii, a particulelor elementare încărcate electric. Când aceşti curenți "amperici" sunt polarizați permanent, atunci corpul are comportare macroscopică de magnet permanent, iar când nu sunt polarizați permanent, dar se pot polariza sub acțiunea unui câmp magnetic exterior, atunci corpul are comportare macroscopică de corp magnetizabil.

3.4.2. Interacțiuni electromagnetice

Forța electrodinamică. Două conductoare rectiliniii, parcurse de curenții I_1 şi I_2 interacționează între ele cu o forță numită *electrodinamică*. Valoarea acestei forțe în vid, raportată la unitatea de lungime, este:

$$\frac{F}{l} = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi d} \tag{3.62}$$

dacă conductoarele sunt paralele la distanța d şi nulă, dacă conductoarele sunt perpendiculare. Forța este atractivă, dacă curenții paraleli sunt de acelaşi sens şi repulsivă, dacă curenții au sensuri contrare; μ_0 este o constantă de proporționalitate, numită *permeabilitatea magnetică a vidului* şi are valoarea $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad H/m$.

Forța electromagnetică. Forța electrodinamică, adică forța de interacțiune dintre două conductoare parcurse de curenți, poate fi considerată ca fiind forța cu care câmpul magnetic al unui curent acționează asupra altui curent. Dar cum, prin definiție, forța cu care un câmp magnetic acționează asupra unui curent se numeşte *forță electromagnetică*, înseamnă că forța electromagnetică şi cea electrodinamică au aceeaşi natură.

Deci relația (3.62) se poate scrie: $F = lI_1B_2 = lI_2B_1$ şi în general,

$$F = lIB \tag{3.63}$$

unde B este dat de legea experimentală, stabilită de Biot şi Savart,

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi d} \tag{3.64}$$

şi măsoară câmpul magnetic produs de un curent rectiliniu. Din motive istorice, vectorul $\vec{B}$ se numeşte inducție magnetică, în timp ce vectorul $\vec{H}$, definit prin relația

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \tag{3.65}$$

se numeşte *intensitatea câmpului magnetic*.

Relația (3.65) este valabilă şi în alt mediu decât vidul, cu condiția să fie omogen, caz în care în loc de μ_0 se foloseşte μ, numit permeabilitatea magentică a mediului respectiv.

Faptul evidențiat anterior şi anume, dacă unul dintre curenți este perpendicular pe câmpul celuilalt, forța are valoare maximă, iar când unul dintre curenți este paralel cu câmpul celuilalt, forța este nulă, sugerează copletarea relației (3.63): $F = lIB \sin\alpha$ sau vectorial:

$$\vec{F} = I\left(\vec{l} \times \vec{B}\right) \tag{3.66}$$

Vectorul $\vec{l}$ are direcția şi sensul curentului, modulul l este lungimea acelei porțiuni de curent care se află în câmp magnetic, iar α este unghiul dintre $\vec{l}$ şi $\vec{B}$. Aceasta este formula completă a forței electromagentice care acționează asupra unui curent rectiliniu I, aflat într-un câmp a cărui inducție este $\vec{B}$.

În cazul în care curentul filiform este curbiliniu, porțiunea de curbă de curent aflată în câmp magnetic fiind Γ, iar $\vec{B}$ nu este neapărat acelaşi de-a lungul curentului, formula (3.66) devine: $\vec{F} = I\oint_{\Gamma} d\vec{l} \times \vec{B}$

În cazul în care curentul nu este filiform, ci este distribuit cu o densitate i într-un domeniu τ, forța electromagnetică este:

$$\vec{F} = \int_{\tau} \left(\vec{i} \times \vec{B}\right) \cdot d\tau, \tag{3.67}$$

deoarece $I \cdot d\vec{l} = i \cdot S \cdot d\vec{l} = \vec{i} \cdot S \cdot dl.$ Relația (3.67) constituie formula generală a forței electromagnetice.

Forța Lorentz. Forța electromagnetică, adică forța cu care un câmp magnetic acționează asupra unui curent, este în fond forța cu care câmpul magnetic acționează asupra sarcinilor în mişcare, care constituie curentul. Ținând seama de relația $\vec{i} = \rho \cdot \vec{v}$ şi de faptul că $\rho \cdot d\tau = dq$, relația (3.67) se scrie: $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ (3.68)

Dacă în afară de câmpul magnetic, există un câmp electric, de intensitate $\vec{E}$, atunci forța totală care acționează asupra particulei încărcate electric este:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{3.68'}$$

şi se numeşte *forța Lorentz*. Se constată că semnul *forței Lorentz* depinde de semnul sarcinii electrice asupra căreia acționează. Se observă deasemenea că forța "magnetică" $q\vec{v} \times \vec{B}$ fiind perpendiculară pe $\vec{v}$ nu modifică modului vitezei, deci nici energia cinetică, ci numai direcția, acționând ca o forță centripetă.

Mişcarea unei particule încărcate într-un câmp magnetic omogen are loc astfel: dacă viteza iniţială a particulei nu are componentă perpendiculară pe $\vec{B}$, atunci ea se deplasează rectiliniu, neinfluenţată de $\overline{B}$; dacă nu are componentă paralelă cu $\vec{B}$ atunci se deplasează pe o spirală sau pe un cerc, după cum este sau nu accelerată de un câmp electric.

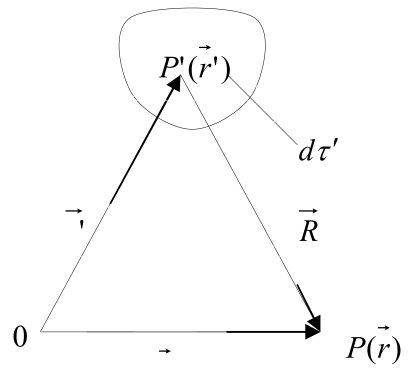
3.4.3. Formula Biot-Savart-Laplace

Biot şi Savart au stabilit experimental realţia (3.64), valabilă pentru un curent rectiliniu, filiform şi constant. În cazul în care curentul este nefiliform, prezenând însă o simetrie cilindrică a densităţii de curent, distanţa d se măsoară de la axa de simetriu a cilindrului. Laplace a generalizat realţia (3.64) pentru un curent oarecare, constant, sub forma:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\vec{i}\,(\vec{r}\,')\times\vec{R}}{R^3}d\tau', \tag{3.69}$$

unde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$ este vectorul cu originea în punctul P', de vector de poziţie $\vec{r}\,'$ din domeniu τ' în care este distribuită densitatea de curent $\vec{i}$, $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al punctului P în care se calculează $\vec{H}$, iar $d\tau'$ este elemntul de volum asociat punctului P' (Fig. 3.10).

Pentru un curent aproximativ filiform, cu secţiunea S', avem: $\vec{i}\,d\tau' = \vec{i}\,S'dl = I d\vec{l}$



şi deci

Fig.3.10

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_{T}\frac{d\vec{l}\times\vec{R}}{R^3} \tag{3.70}$$

Particularizând pentru un curent rectiliniu, se regăseşte relaţia (3.64).

Într-adevăr, din figura 3.11 avem:

$$\sin\theta = \frac{d}{R}; \quad R^2 = d^2 + l^2,$$

încât

$$H = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\theta}{R^2}dl = \frac{I\cdot d}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dl}{(d^2+l^2)^{3/2}},$$

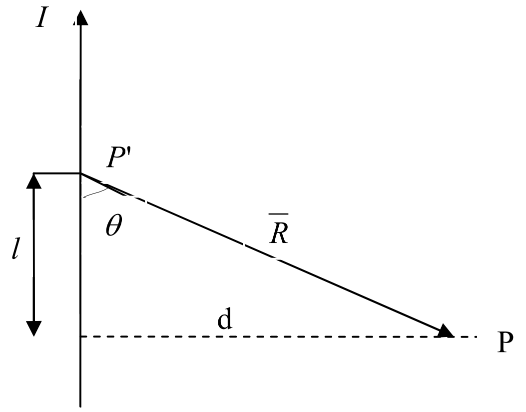


Fig.3.11

Cum integrantul este funcție pară în raport cu *l,* avem:

$$H = \frac{I\cdot d}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{dl}{(d^2+l^2)^{3/2}} = \frac{I\cdot d}{2\pi}\left[\frac{l}{d^2(d^2+l^2)^{1/2}}\right]_{l=0}^{\infty} = \frac{I}{2\pi d},$$

În fine, să observăm că integrantul din relația (3.69) se scrie:

$$\frac{\vec{R}\cdot\vec{i}\,(\vec{r}\,')}{R^3} = -\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{i}\,(\vec{r}\,') = -\nabla\times\left[\frac{\vec{r}\left(\vec{r}\,'\right)}{R}\right];$$

pentru ultimul semn de egalitate se foloseşte identitatea $\nabla\times\left(s\vec{v}\right) = \nabla s\times\vec{v} + s\cdot\nabla\times\vec{v}$,

unde s este o funcție scalară oarecare, iar $\vec{v}$ este o funcție vectorială; se are în vedere faptul că $\dot{i}(\vec{r}\,')$ nu depinde de coordonatele $\vec{\ }$ la care se referă ∇. Astfel, relația (3.69) se poate scrie şi sub forma:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \nabla\times\frac{1}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\dot{i}(\vec{r}\,')}{R}d\tau' \tag{3.71}$$

Observație. Legea Biot-Savart-Laplace aparținând teoriei interacțiunilor instantanee la distanță, are o valabilitate restrânsă doar la cazul staționar şi numai cu unele aproximații, la cazul nestaționar.

3.4.4 Ecuațiile câmpului magnetic constant

Deoarece divergența unui rotor este nulă, din (3.71) rezultă $\nabla\vec{H} = 0,$ de unde, în virtutea relației (3.65), avem:

$$\nabla\vec{B} = 0. \tag{3.72}$$

Pentru a găsi o a doua ecuație diferențială, să observăm mai întâi că:

$$\nabla\int_{\tau}\frac{\vec{i}\left(\vec{r}'\right)}{R}d\tau' = 0 \tag{3.73}$$

Într-adevăr, ținând seama de identitatea $\nabla\left(s\vec{v}\right) = (\nabla s)\vec{v} + s\cdot\nabla\vec{v},$ unde s este o funcție scalară oarecare, iar $\vec{v}$ este o funcție vectorială, avem:

$$\nabla\left[\frac{\vec{i}\left(\vec{r}'\right)}{R}\right] = \nabla\cdot\left(\frac{1}{R}\right)\vec{i}(\vec{r}') + \frac{\nabla\vec{i}\left(\vec{r}'\right)}{R}$$

Având în vedere că ultimul termen este nul, în virtutea faptului că $\vec{i}(\vec{r}')$ nu depinde de coordonatele $\vec{\ }$ la care se referă ∇, ci numai la coordonatele ' la care se referă ∇', precum și la faptul ușor de verificat că $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla'\left(\frac{1}{R}\right),$ avem:

$$\nabla\left[\frac{\vec{i}\left(\vec{r}'\right)}{R}\right] = \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)\vec{i}\left(\vec{r}'\right)$$

aplicând din nou identitatea menționată, avem:

$$\nabla\left[\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{R}\right] = -\nabla'\cdot\frac{\vec{i}(\vec{r}')}{R} + \frac{\nabla'\vec{i}(\vec{r}')}{R}$$

În virtutea ecuației de continuitate și a faptului că avem în considerație cazul staționar, adică $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$ ultimul termen este nul. În aceste condiții, avem:

$$\nabla\int_{\tau}\frac{\vec{i}\,(\vec{r}')}{R}d\tau' = \int_{\tau}\nabla\left[\frac{\vec{i}\,(\vec{r}')}{R}\right]d\tau' = -\int_{\tau}\nabla'\left[\frac{\vec{i}\left(\vec{r}'\right)}{R}\right]d\tau' = -\int_{S}\frac{\vec{i}\left(\vec{r}'\right)}{R}d\vec{S} = -\int_{S}\frac{i_n\left(\vec{r}'\right)}{R}dS$$

Componenta i_n a densității de curent după normala la frontiera domeniului τ în care este distribuit curentul, fiind nulă, rezultă că relația (3.73) este demonstrată.

Aplicând rotorul relației (3.71) și ținând seama de identitatea

$$\nabla\times\nabla\times\vec{v} = \nabla\left(\nabla\vec{v}\right) - \nabla^2\vec{v}$$

atunci din relația (3.73), precum şi din relația lui Poisson (cunoscută de la funcțiile vectoriale din matematică):

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{f\left(\vec{r}'\right)}{R} d\tau' = -f\left(\vec{r}\right)$$

(unde f este o funcție arbitrară; în cazul nostru, rolul lui f îl joacă componentele vecorului $\vec{i}$),

obținem: $\nabla \times \vec{H} = \vec{i}$ (3.74)

Ecuațiile diferențiale (3.72) şi (3.74) au fost obținute pentru câmpul magnetic al unui curent constant, arbitrar. Dar, în virtutea faptului că ecuațiile (3.72) şi (3.74) sunt liniare şi a principiului suprapunerii, potrivit căruia câmpul rezultant este suma vectorială a câmpurilor parțiale, rezultă că ecuațiile (3.72) şi (3.74) sunt valabile pentru câmpul magnetic al oricărei surse constante, fie curenți propiu-zişi, fie o reuniune de curenți "amperici" ai unui magnet permanent. În acest caz,

$$\nabla \times \vec{H}_m = \vec{i}_m, \tag{3.75}$$

unde $\vec{i}_m$ este densitatea curenților "amperici" care produc câmpul magnetic $\vec{H}_m$

Evident, ecuațiile duferențiale (3.72) şi (3.74) sunt echivalente cu ecuațiile integrale

$$\int_\tau \nabla\vec{B} \cdot d\tau = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \tag{3.76}$$

oricare ar fi volumul τ, de frontieră S şi respectiv,

$$\oint_\Gamma \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{i}\, d\vec{S}, \tag{3.77}$$

oricare ar fi suprafața S, de frontieră Γ.

Ecuația (3.76) exprimă faptul că fluxul magnetic prin orice suprafață închisă este nul, adică fluxul care intră este egal cu cel care iese. Această constatare era de aşteptat, deoarece, după cum am vazut în experiențele cu pilitura de fier, liniile de câmp magnetic sunt închise. Din acest motiv, ecuația (3.72)

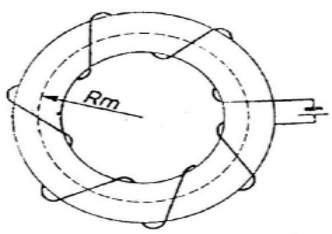


Fig. 3.12

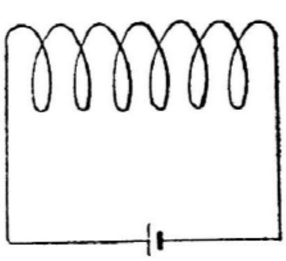


Fig 3.13

este valabilă nu numai în vid, ci şi în orice mediu, omogen sau neomogen, inclusiv în regim variabil.

Ecuația (3.77) se mai poate scrie:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \tag{3.78}$$

şi ea exprimă faptul că integrala intensității câmpului magnetic pe o curbă închisă (tensiunea magnetomotoare) este egală cu solenația, adică suma curenților pe care îi înconjoară curba respectivă. Menționăm că în această sumă, fiecare curent se însumează algebric de atâtea ori, de câte ori traversează suprafața respectrivă.

Ca aplicație a ecuației (3.78), deci şi a ecuației (3.74), numită *legea circuilală a lui Ampère*, calculăm intensitatea câmpului magnetic în două situații.

a. Bobina teroidală cu N spire, străbătută de curentul I (fig 3.12). În interiorul bobinei, intensitatea câmpului este aproximativ constantă, astfel integrând pe o curbă închisă care parcurge interiorul torului, avem:

$$\oint_{\tau} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi R_m H$$

şi ținând seama de (3.78), se obține: $H = \dfrac{NI}{2\pi R_m}$

unde R_m este raza mediană a torului.

b. Solenoid, adică bobina dreaptă cu un singur rând de spire (Fig. 3.13)

Câmpul în interiorul bobinei este de asemenea aproximativ omogen. Neglijând efectele de capete (deformarea câmpului de capete) şi ținând seamă că la distanțe mari, câmpul este neglijabil, avem: $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot l$, deci $H = \dfrac{NI}{l}$

3.4.5 Interacțiuni între câmpuri magnetice

Ca expemplu, vom studia mai întâi interacțiunea dintre un câmp magnetic oarecare şi câmpul magnetic creat de o spiră plană de curent.

Experimental, se constată că asupra unei spire plane de curent, de intensitate *I* şi de arie *S*, aflată într-un câmp magnetic de inducție $\vec{B}$ neomogen, acționează un cuplu:

$$\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B} \tag{3.79}$$

şi o forță

$$\vec{F} = (\vec{m}\nabla) \cdot \vec{B} \tag{3.80}$$

În aceste relații, $\vec{m}$ este momentul magnetic al spirei şi este dat de relația:

$$\vec{m} = S \cdot I \cdot \vec{n}, \tag{3.81}$$

în care $\vec{n}$ este versorul normal al suprafeței spirei, având sensul dat de regula burghiului drept. Evident, dacă $\vec{B}$ este omogen, atunci $\vec{F}$ este nul. Aşadar, atât cuplul cât şi forța nu depind de forma buclei plane, ci numai de aria sa şi de intensitatea curentului care o străbate.

De fapt, un sistem cu un moment magnetic $\vec{m}$ aflat într-un câmp magnetic omogen, este rotit datorită cuplului $\vec{C} = \vec{m} \times \vec{B}$ trecând în poziții cu energie potențială mai mică. Lucrul mecanic elementar efectuat este egal cu mărimea $-dU$ cu care scade energia potențială la o mică rotație $d\alpha = -d\theta$ (fig. 3.14):

$$dW = C \cdot d\alpha = -dU$$

sau $\quad -dU = dW = mB\sin\theta \cdot d\alpha = -mB\sin\theta d\theta = d(mB\cos\theta).$

Prin integrare, obținem: $\quad U = -mB\cos\theta + const = -\vec{m}\vec{B} + const.$

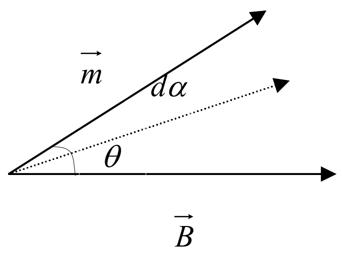
Alegând valoarea zero pentru constantă, rezultă că un sistem cu momentul magnetic $\vec{m}$, aflat într-un câmp magnetic de inducție $\vec{B}$, posedă energia potențială:

$$U = -\overline{m}\overline{B} \tag{3.82}$$

Să considerăm acum interacțiunea dintre un corp magnetic oarecare şi câmpul magnetic creat de un mediu magnetizabil, de exemplu, chiar un magnet. Presupunem deci că un mic magnet se află într-un câmp magnetic exterior. Asupra magnetului acționează un cuplu şi o forță, date de realțiile (3.79) şi (3.80), unde $\vec{m}$ de data aceasta caracterizează magnetul, dar se numeşte tot *moment magnetic* (al magnetului). Dacă magnetul nu are dimensiuni mici, iar câmpul în care se află nu este omogen, atunci cuplul şi forța sunt respectiv

$$\vec{C} = \int_\tau d\vec{m} \times \vec{B} \tag{3.83}$$

$$\vec{F} = \int_\tau \left(d\vec{m}\nabla\right)\vec{B} \tag{3.84}$$



unde τ este volumul magnetului.

Fig. 3.14

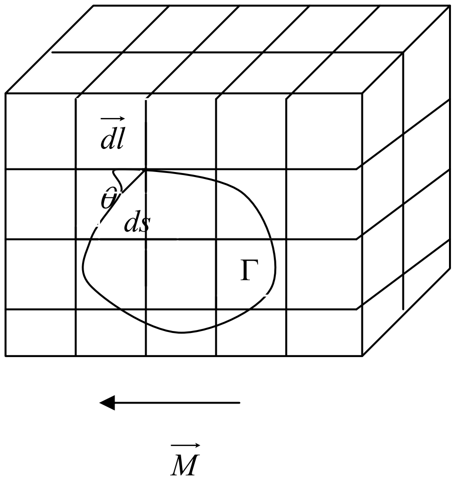


Fig. 3.15

Introducând densitatea volumică de moment magnetic $\vec{M}$ numită şi *intensitate de magnetizare sau magnetizaţie*, prin relaţia:

$$\vec{m} = \int_{\tau} d\vec{m} = \int_{\tau} \vec{M} \cdot d\tau, \tag{3.85}$$

relaţiile (3.83) şi (3.84) devin :

$$\vec{C} = \int_{\tau} (\vec{M} \times \vec{B}) d\tau, \tag{3.86}$$

$$\vec{F} = \int_{\tau} \left(\vec{M}\nabla\right)\vec{B} \cdot d\tau. \tag{3.87}$$

Considerând după Ampère, că momentul magnetic al corpului magnetizat provine din momentele magnetice ale curenţilor amperici, definite prin relaţia (3.81), se constată că magnetizaţia $\vec{M}$ coincide cu $\vec{H_m}$ din relaţia (3.75). Într-adevăr, un microdomeniu din figura 3.15, de lungime dl şi de secţine dS are, conform relaţiei (3.81), momentul magnetic $dI_m \cdot dS \cdot \vec{n}$ unde dI_m este curentul amperic corespunzător. În acelaşi timp, din relaţia (3.85), momentul magnetic este:

$\vec{M} \cdot d\tau = \vec{M} \cdot dl \cdot dS$, astfel că din egalitatea acestora, precum şi din faptul că $\vec{M}$ este paralel cu $\vec{n}$, rezultă evident $dI_m = M \cdot dl$

Considerăm acum o curbă închisă oarecare Γ, care trece prin corpul magetizat şi observând că între $\overrightarrow{dl}$ şi elemntul de arc $d\vec{s}$, luat pe curba Γ, există relația $dl = ds \cdot \cos\theta,$ unde θ este unghiul dintre *ds* şi $\vec{M}$ ($d\vec{l}$ este paralel cu $\overrightarrow{M}$), avem:

$$dI_m = M \cdot ds \cdot \cos\theta = \overrightarrow{M} \cdot d\vec{s},$$

deci curentul amperic care traversează aria *S*, delimitată de curba Γ, este:

$$I_m = \oint_\Gamma \overrightarrow{M} \cdot d\vec{s} = \int_S \left(\nabla \times \overrightarrow{M}\right) d\vec{S}$$

Cum, pe de altă parte, avem

$$I_m = \int_S \vec{i}_m d\vec{S}$$

rezultă

$$\nabla \times \overrightarrow{M} = \vec{i}_{m.} \qquad (3.88)$$

Comparând acest rezultat cu relația (3.75), se vede că rotorul lui $\overrightarrow{H}_m$ şi cel al lui $\overrightarrow{M}$ coincid. Se admite însă că ei înşişi coincid (deşi matematic, doi vectori cu rotori egali pot diferi prin gradientul unei funcții scalare).

Dacă într-un câmp magnetic se află un corp magnetizat (magnetizare care poate să fie sau nu datorată exclusiv acestui câmp), atunci în ecuația câmpului rezultat intervin deopotrivă curenții de conducție şi cei amperici, deci

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i} + \vec{i}_m \qquad (3.89)$$

sau, ținând seama de (3.88)

$$\nabla \times \left(\overrightarrow{H} - \overrightarrow{M}\right) = \vec{i}, \qquad (3.90)$$

adică s-a obținut o relație între curenții amperici şi magnetizație.

3.4.6. Susceptivitate şi permeabilitate magnetică

Orice substanță produce o modificare mai mică sau mai mare a câmpului magnetic în care este plasată, datorită suprapunerii peste acesta a câmpului rezultat din magnetizarea substanței respective.

Dacă o bobina toroidală are interiorul plin cu substanță (miezul bobinei) inițial nemagnetizată şi dacă prin bobină trece un curent *I*, atunci inducția magnetică $\vec{B}$ din interiorul bobinei este suma dintre $\mu_0\overrightarrow{H}$, care ar exista în vid şi câmpul $\overrightarrow{B_m} = \mu_0\overrightarrow{M}$, datorat magnetizării substanței:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \tag{3.91}$$

unde $\vec{M}$ este magnetizația datorată câmpului magnetizat $\vec{H}$. În vid, $\vec{M} = 0$ şi $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

La unele substanțe, puține la număr, numite *magnetic-dure* magnetizația nu este funcție biunivocă de câmpul magnetizat $\vec{H}$, dar se poate separa în doi termeni: $\vec{M} = \vec{M}_t(\vec{H}) + \vec{M}$. Termenul $\vec{M}_t$ este funcție biunivocă de $\vec{H}$ şi se numeşte *magnetizație temporară*, iar $\vec{M}_r$ se numeşte *magnetizație remanentă* (sau permanentă), care depinde de $\vec{H}$, dar nu în mod biunivoc. Celelalte substanțe, numite *magnetic-moi*, nu prezintă magnetizație remanentă, ci numai magnetizație temporară. În continuare, vom nota magnetizația temporară simplu prin $\vec{M}$, deoarece ne vom referi exclusiv la aceasta.

În cazul mediilor *liniare* din punctul de vedere magnetic, fără magnetizație remanentă ($\vec{M}_r \equiv 0$), relația dintre $\vec{M}$ şi $\vec{H}$ are forma:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{3.92}$$

unde χ_m este susceptivitatea magnetică a substanței. În cazul general, χ_m depinde de $\vec{H}$ într-un mod complicat; nu se cunoaşte o relație matematică pentru această dependență, ci numai curbe trasate experimental pentru fiecare substanță în parte. Unele substanțe sunt *anizotrope* din punct de vedere magnetic, încât χ_m este un tensor, în general dependent de $\vec{H}$ (adică fiecare componentă este funcție de $\vec{H}$). Majoritatea substanțelor însă sunt *izotrope* adică χ_m este o funcție (scalară) de $\vec{H}$; dintre acestea, mediile liniare au χ_m aproximativ constant, în raport cu $\vec{H}$.

O clasificare a substanțelor, din punct de vedere al semnului şi al valorii lui χ_m, este următoarea: unele substanțe, puține la număr, nimite *feromagnetice* (printre care şi fierul) au χ_m pozitiv, cu valoare mare şi mult dependentă de $\vec{H}$; altele, foarte multe, numite *paramagnetice*, au χ_m de asemenea pozitiv, dar de valoare mică şi practic independentă de $\vec{H}$; restul substanțelor, de asemenea multe, numite *diamagnetice* (printre care bismutul, cuprul etc.) au ca şi paramagneticile χ_m de valoare mică şi practic independentă de $\vec{H}$, dar negativă, adică aceste substanțe au vectorul $\vec{M}$ invers câmpului inductor. Menționăm că de fapt, diamagnetismul este o propietate generală a substanțelor, dar este observabilă numai la substanțele la care nu este mascată de feromagnetism şi de paramagetism.

Introducând (3.92) în (3.91), avem: $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$ sau cu notația

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m), \tag{3.93}$$

avem

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{3.94}$$

Factorul μ se numeşte *permebilitatea magnetică* a substanței respective, iar μ_r, definit de relația

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi_m, \tag{3.95}$$

se numeşte *permeabilitate magnetică relativă* (în raport cu cea a vidului). Cele menționate mai sus referitor la χ_m se resfrang, evident şi aupra lui μ: el depinde de câmpul magnetizant $\vec{H}$ într-un mod complicat (neexprimat până la ora actuală printr-o formulă matematică).

3.5. REGIMUL VARIABIL

3.5.1. Inducția electromagnetică

Fenomenul de producere a unui câmp electric cu ajutorul unui câmp magnetic (inductor) poartă numele de *inducție electromagnetică*.

Câmpul electric indus se poate pune în evidență printr-o serie de experiențe fundamentale, din care una este mai cunoscută. Într-un circuit închis, format dintr-o bobină şi un galvanometru, la introducerea sau la scoaterea unui magnet din bobină are loc o variațe a fluxului magnetic inductor. Spirele bobinei sunt intersectate de un număr variabil de linii de inducție ale magnetului, ceea ce face să apară un câmp electric indus. Sub acțiunea acestui câmp, electronii liberi din circuit sunt puşi în mişcare ordonată, dând naştere unui curent electric de inducție. La rândul său, curentul de inducție se datorează forței electromotoare de inducție, care apare ca urmare a variației fluxului inductor.

Presupunem o porțiune dintr-o spiră, de lungime $ab = l$, care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ într-un câmp magnetic omogen, de inducție $\vec{B}$ (fig.3.16). Asupra electronilor liberi acționează forța Lorentz, ceeea ce determină deplasarea lor spre capătul b al conductorului, care se încarcă negativ, în timp ce capătul a se încarcă pozitiv.

S-a arătat că producerea curentului electric se datorează existenței unor forțe neelectrice. Câmpul electric imprimat, corespunzător forței Lorentz, are intensitatea:

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Tensiunea electromotoare, indusă într-o porțiune $d\vec{l}$ a conductorului va fi:

$$d\mathrm{E} = \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l}$$

În întreg conductorul, tensiunea indusă este:

$$\mathrm{E} = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{l}$$

unde $\vec{l}$ este lungimea orientată a conductorului, presupunând un câmp magnetic omogen $\vec{B}$

Observăm că:

$$\mathrm{E} \cdot dt = \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{l} \cdot dt = \left(\vec{v} \cdot dt \times \vec{B}\right) d\vec{l} = -\vec{B}\left(\vec{v} \cdot dt \times d\vec{l}\right) = -\vec{B} \cdot d\vec{S}$$

unde $d\vec{S}$ reprezintă elementul de arie orientat, măturat de conductor în timpul dt, străbătut de fluxul $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$ Rezultă:

$$\mathrm{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{3.96}$$

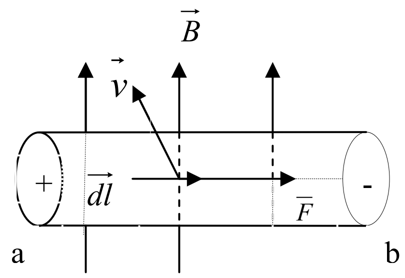


Fig.3.16

ceea ce arată că dacă printr-o secțiune S a unei spire variază printr-o cale oarecare, fluxul magnetic, atunci în spiră se induce o tensiune electromotoare E. Din cele spuse mai sus rezultă că fluxul inducției electromagnetice se definește prin relația:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} \tag{3.97}$$

Descoperirea calitativă şi cantitativă a fenomenului de inducţie se datoreşte lui Faraday, elucidarea problemei sensului se datoreşte lui Lenz, iar exprimarea matematică (3.69) se datoreşte lui Neumann.

Variația fluxului magnetic, deci inducerea unei tensiuni electromotoare, se poate produce în următoarele moduri: variația lui $\vec{B}$ (modificarea modulului sau a sensului), variația lui $\vec{S}$ (variația ariei sau a poziției ei în raport cu câmpul), sau variația ambilor factori ai fluxului $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$. De fapt, Faraday a evidențiat două laturi distincte ale fenomenului şi anume:

a. variația câmpului induce tensiune şi
b. mişcarea în câmp induce tensiune.

Sensul este dat de *Legea lui Lenz* care se enunță astfel: sensul tensiunii induse este astfel încât fluxul magnetic al curentului indus să compenseze variația fluxului inductor. Cu alte cuvinte, atunci când fluxul inductor creşte, se induce o tensiune al cărui curent produce un flux magnetic în semns contrar fluxului inductor, iar atunci când fluxul inductor se micşorează, se induce o tensiune, căreia îi corespunde un curent care dă un flux magnetic de acelaşi sens cu fluxul inductor.

3.5.2 Ecuațiile lui Maxwell

Inducția electromagnetică, exprimată prin relația (3.96), se produce în orice mediu, inclusiv în vid, indiferent de prezența vreunui conductor.

Tensiunea electromotoare, pe conturul Γ care mărgineşte suprafața S, a fost definită prin relația (3.61) şi este:

$$\mathsf{E} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{3.98}$$

iar fluxul magnetic prin S este dat de relația (3.97), astfel că relația (3.96)se poate scrie:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} d\vec{l} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \tag{3.99}$$

După ce aplicăm teorema lui Stokes primei integrale, S fiind arbitrară, obținem:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3.100}$$

Aceasta este o ecuație locală, general valabilă în orice punct fix în raport cu sursa de câmp variabil; ea exprimă relația dintre variația în timp a lui $\vec{B}$ într-un punct şi câmpul $\vec{E}$ pe care-l induce în acel punct. Ecuația (3.100) reprezintă unul dintre postulatele fundamentale ale electromagnetismului şi arată că: *orice variație de câmp magnetic într-o regiune din spațiu* *determină apariția unui câmp electric rotațional* $(rot\vec{E} = \nabla \times \vec{E} \neq 0)$. Relația (3.100) reprezintă ecuația Maxwell-Faraday. Ecuația câmpului magnetic constant (3.74) nu este valabilă şi pentru câmpul variabil; ea nu este compatibilă cu legea conservării sarcinii (ecuația de continuitate). Maxwell a "forțat" această compatibilitate, ajungând în mod firesc la noțiunea de *curent de deplasare,* care reprezintă un fenomen reciproc celui de inducție electromagnetică. Deci un fenomen descoperit prin calcul.

Într-adevăr, aplicând operatorul divergență asupra ecuației $\nabla \times \vec{H} = \vec{i}$ a câmpului magnetic constant, rezultă că divergența lui $\vec{i}$ este nulă, ceea ce nu este adevărat în cazul regimului variabil, când este îndeplinită ecuația de continuitate (3.54), adică:

$$\nabla \cdot \vec{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{3.101}$$

În cazul regimului variabil, se admite existența unei densități de curent suplimentar $\vec{i}_d$ care împreună cu $\vec{i}$, densitatea curentului de conducție, dă câmpul magnetic variabil, adică:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i} + \vec{i}_d \tag{3.102}$$

Aplicând asupra acestei relații operatorul divergență şi ținând seama de (3.101), precum şi de faptul că $\nabla\left(\nabla \times \vec{H}\right) = 0$, rezultă: $\nabla \vec{i}_d = \frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Întrucât densitatea de sarcină ρ se poate înlocui din relația $\nabla \vec{D} = \rho$, rezultă imediat:

$$\nabla \vec{i}_d = \nabla \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{3.103}$$

ceea ce arată că $\vec{i}_d$ coincide cu $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ până la un vector aditiv de divergență nulă,

$$\vec{i}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{f}, \quad \nabla \vec{f} = 0$$

Făcând ipoteza $\vec{f} \equiv 0$, ccea ce s-a confirmat prin faptele experimentale, avem:

$$\vec{i}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{3.104}$$

care din motive evidente se numeşte densitatea curentului de deplasare. De remarcat faptul că $\partial \vec{D} / \partial t \neq 0$ şi în vid, deşi aici nu există sarcini. În acest fel, relația (3.103) devine:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{3.105}$$

care, ca şi (3.100), este o ecuaţie locală, general valabilă în raport cu sistemele de referinţă fixe şi exprimă relaţia dintre $\vec{i}$, variaţia în timp a lui $\vec{D}$, pe de o parte şi câmpul magnetic pe care acesta îl produce, pe de altă parte. Ecuaţia (3.105), numită şi ecuaţia Maxwell-Ampère, arată că *un câmp electric variabil generează un câmp magnetic cu liniile de câmp închise.*

Aşadar, la densitatea de curent de conducţie $\vec{i}$, existentă în ecuaţia:

$\nabla \times \vec{H} = \vec{i}$

pentru cazul static, se adaugă densitatea de curent de deplasare (3.104), diferită de zero, inclusiv în vid, atât timp cât câmpul este variabil. Aplicând divergenţa asupra ecuaţei (3.105), rezultă că densitatea *totală* de curent,

$\vec{i}_t = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, satisface relaţia $\nabla \vec{i}_t = 0$

Faptul că $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ induce câmp magnetic, - care a fost verificat experimental ulterior descoperirii prin calcul, - este într-adevăr un fenomen reciproc inducţiei electromagnetice şi poate fi numit *inducţie magnetoelectrică*. Această interdependenţă a câmpurilor electric şi magnetic, în regim variabil, impune noţiunea de *câmp electromagnetic*, luate separat.

Ecuaţia (3.105) se scrie evident şi sub forma echivalentă:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} = \int_{S} \vec{i}\, d\vec{S} + \int_{S} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} \qquad (3.106)$$

Ecuaţiile (3.100) şi (3.105), obţinute considerând ragimul variabil, precum şi ecuaţiile (3.43) şi (3.72), obţinute pentru regim staţionar, dar presupuse şi confirmate ca valabile şi pentru regimimul variabil, constituie cele patru ecuaţii pe care Maxwell le-a pus la baza construcţiei axiomatice a electromagnetismului şi pe care le transcriem aici grupate:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},\ \nabla \times \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},\ \nabla \vec{D} = \rho\ \nabla \vec{B} = 0$$

Menţionăm că cele patru ecuaţii ale lui Maxwell descriu câmpul electromegnetic în sisteme de referinţă fixe în raport cu domeniul de distribuţie a surselor de câmp, adică punctul curent în care sunt scrise este fix în raport cu domeniul în care sunt distribuite sarcinile şi curenţii.Dacă însă punctul în care ne interesează câmpul electromagnetic este mobil în raport cu domeniul de distribuţie al sarcinilor şi curenţilor, atunci câmpul se obţine din cel pentru cazul când punctul este imobil – ecuaţiile lui Maxwell, (3.107) - cu ajutorul unor transformări numite *transformările Lorentz pentru câmpuri.*

CAPITOLUL 4
TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE

4.1. UN NOU PRINCIPIU AL RELATIVITĂȚII

Poziția unui corp se raportează întotdeuna la un reper, considerat fix (*referențial* sau *sistem de referință*). Față de unele sisteme de referință corpul este în repaus, iar față de altele el se mişcă pe anumite traiectorii, ceea ce exprimă *relativitatea mişcării*. În mecanica clasică relativitatea se referă numai la spațiu, pe când timpul este considerat acelaşi în orice sistem de referință (universal).

Principul relativității în mecanica clasică, este numit şi *principul relativității lui Galilei*. Conform acestui principiu legile macanice trebuie formulate în aşa fel încât ele să îşi nu schimbe forma la exprimarea lor într-un sistem de referință inerțial sau în altul, adică *legile mecanicii sunt invariante față de transformările Galilei.*

Formularea principiului lui Galilei pentru procesele mecanice nu ar trebui sa excludă valabilitatea sa pentru procesele electromagnetice sau de alt fel. S-a constatat însă că principiul lui Galilei nu se verifică în cazul sistemelor care se deplasează cu viteze mari față de vitezele cu care lucrează mecanica clasică. De exemplu, ecuațiile lui Maxwell, care se referă la undele electromagnetice, nu sunt invariante față de transformările Galilei ale coordonatelor.

A apărut astfel necesitatea formulării unui principiu mai general, în acord cu rezultatele experimentale referitoare la sisteme care se deplasează cu orice viteză, pe baza căruia să se stabilească noi relații de transformare a coordonatelor spațio-temporale la exprimarea într-un sistem de referință inerțial sau în altul. Față de aceste noi transformări, transformările Galilei trebuie să reprezinte un caz particular.

În anul 1905 Einstein a pus bazele teoriei relativității restrânse prin formularea unui principiu, mai general decât principul lui Galilei, cu ajutorul căruia s-au obținut transformările Lorentz speciale. În teoria relativității restrânse se explică ştiințific rezultatele măsurătorilor obținute de către observatorul aflat în *mişcare relativă* față de fenomenul studiat. În teoria relativității restrânse se renunță la două noțiuni absolute ale fizicii clasice: spațiul şi timpul, şi se demonstrează interdependența între spațiu şi timp, masă şi energie. Teoria relativității, alături de mecanica cuantică, constituie fundamentul înțelegerii profunde a macro şi micro-cosmosului. Cum teoria dezvoltată este valabilă doar în sistemele de referință interțiale, se justifică denumirea sa de *teoria relativității restrânse.*

4.2 PREMIZELE FORMULĂRII TEORIEI RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE

4.2.1 Ipoteza eterului

Care este *natura luminii şi după ce legi se propagă ea*, a fost întrebarea obsedantă la care s-a străduit să răspundă fizica secolului trecut. Încă din epoca lui Newton, savantul danez Olaus Roemer a evaluat pentru prima dată viteza luminii prin observarea eclipsei sateliților planetei Jupiter. Conform teoriei ondulatorii a lui Huygens (1692), lumina este o oscilație care se propagă în mediile elastice la fel ca undele sonore. Care este însă mediul de propagare a luminii şi la ce sistem de referință se poate raporta acest mediu. Acesta nu este nepărat un mediu material, fiindcă lumina se propagă şi prin vid.

Ca ipoteză de lucru s-a considerat că există un asemenea mediu suport pentru propagarea luminii care a fost numit eter, care se raportează la Soare şi care „umple" întreg spațiul, inclusiv cel intraplanetar (Fresnel – începutul secolului XIX).

Dacă se admite *ipoteza eterului* ca sistem de referință absolut, viteza luminii pe Pământ ar trebui sa depindă de viteza de mişcare a Pământului în sistemul de coordonate legat de Soare. Dacă viteza luminii față de eter este c, atunci, conform legii de compunere a vitezelor, viteza luminii pe direcția şi în sensul de mişcare a Pământului ar trebui să fie $c-v$, iar pe direcția şi în sensul opus mişcarii Pământului ar fi $c+v$.

Deşi viteza de mişcare a Pământului față de Soare (şi față de eter), v=30km/s, este foarte mare în comparație cu vitezele obişnuite din mecanică, ea este totuşi infinit de mică în comparație cu viteza luminii $c = 3 \cdot 10^5$ km/s.

Referitor la eter, acesta ar fi trebuit să aibă propietăți fizice discordante: rigiditate elastică mare pentru propagarea luminii cu viteză foarte mare, dar densitate şi vâscozitate foarte mici, fiindcă el nu opune rezistență la deplasarea planetelor. Hertz considera că eterul este antrenat complet de corpurile în mişcare , pe când Lorentz credea că eterul este în repaus absolut. Dacă eterul ar fi în repaus absolut, s-ar putea pune în evidență "vântul eteric" care apare la mişcarea Pământului în jurul Soarelui.

4.2.2. Experienţa Michelson şi Morley

Experienţa Michelson şi Morley are o deosebită importanţă în infirmarea existenţei eterului, deoarece rezultatele sale nu au putut evidenţia mişcarea de translaţie a Pământului faţă de eter. Prima variantă a experienţei a fost realizată în anul 1881 de către Michelson cu un interferometru de tip nou, cu performanţe ridicate, construit de el în acest scop. Experienţa a fost reluată şi perfecţionată de Michelson şi Morley în anul 1887, apoi de Morley şi Miller în anul 1904.

Principiul realizării expeineţei Michelson şi Morley este următorul. În Fig. 4.1., raza de lumină emisă de sursa *S*, se divizează, la incidenţa pe lama de sticlă *P*, în două raze. Una dintre ele strabate drumul IO_1PC, adică după refracţia prin lama *P* se deplasează înspre oglinda O_1 pe o direcţie paralelă şi în acelaşi sens cu deplasarea Pământului cu viteza $\vec{v}$ faţă de Soare.

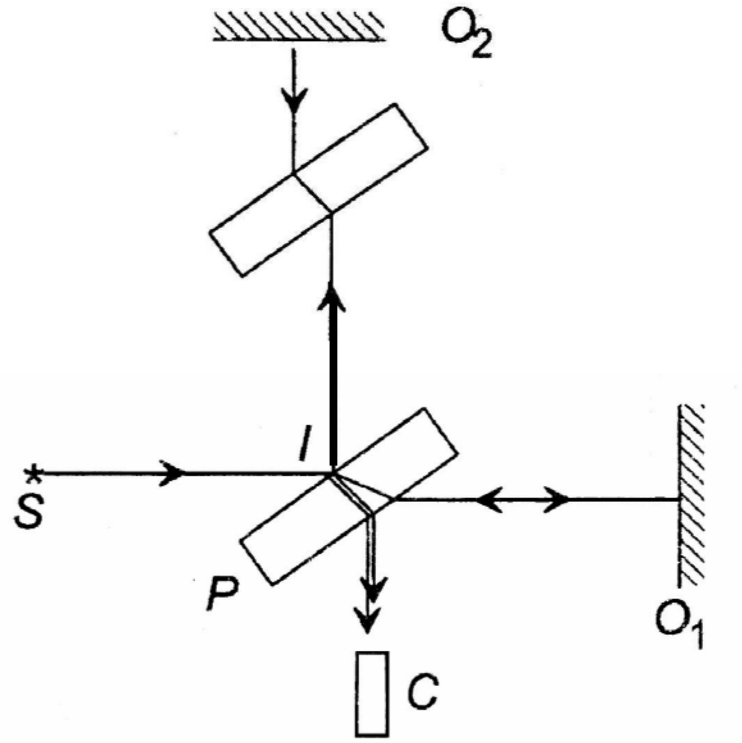


Fig. 4.1. Schema experienţei Michelson şi Morley.

După reflexia normală pe oglinda O_1 raza de lumină se reîntoarce pe lama *P,* având acum sens opus de mişcare faţă de deplasarea Pământului. În urma reflexiei totale în lamă, raza se îndreaptă către *C*. Cealaltă rază parcurge drumul IO_2PC, adică se propagă pe direcţia normală faţă de prima rază şi faţă de direcţia de mişcare a Pământului, se reflectă pe oglinda O_2, suferă o dublă refracţie pe lama *P* şi se îndreaptă paralel cu prima rază către C.

Notând cu *L* distanţa $IO_1 = IO_2$, timpul în care prima rază parcurge distanţa IO_1I este:

$$t_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{1-\beta^2} \tag{4.1}$$

A doua rază de lumină, reflectată în punctul *I* de pe lama *L*, ajunge prin mişcarea Pământului, la oglinda O_2 când aceasta este deja deplasată în poziţia O_2' faţă de eter (fig. 4.2). În urma reflexiei pe oglinda O_2' în punctul B, ea ajunge pe lama P aflată acum în poziţia I'.

Notând cu *t*, timpul în care lumina ajunge din punctul *I* în punctul *B*, egal cu timpul în care *I* s-a deplasat în punctul *A*, atunci scriind $IB = ct, IA = vt, AB = L,$ va exista relaţia:

$$c^2t^2 = v^2t^2 + L^2 \tag{4.2}$$

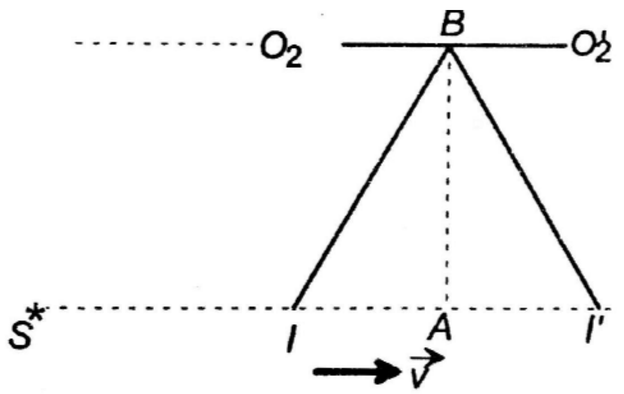


Fig. 4.2. Compunerea mişcărilor razei reflectate în punctul I.

din care:

$$t^2 = \frac{L^2}{c^2 - v^2} = \frac{L^2}{c^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{4.3}$$

sau,

$$t = \frac{L}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{L}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.4}$$

Timpul în care a doua rază parcurge distanţa IBI' este $t_2 = 2t,$ adică:

$$t_2 = \frac{2L}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.5}$$

Se observă că $t_1 > t_2$ ceea ce înseamnă că o întârziere a razei IO_2I (a doua rază) față de raza IO_1I (prima rază). Cum factorul $\beta = \frac{v}{c}$ este foarte mic, se pot face aproximațiile:

$$\left(1-\beta^2\right)^{-1} \approx 1+\beta^2 \tag{4.6}$$

$$\left(1-\beta^2\right)^{-1/2} \approx 1+\frac{\beta^2}{2} \tag{4.7}$$

cu care se calculează:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{c}\beta^2 \tag{4.8}$$

Cele două raze de lumină defazate formează în interferometrul C franje de interferență. La rotirea întregului sistem cu 90° încât locul razei IO_1 să fie luat de raza IO_2 şi invers, calculele prevăd o deplasare a franjelor de interferență cu aproximativ o treime de interfranjă. Experimental nu s-a observat o asemenea comportare, la rotirea sistemului de franjele de interferență nu s-au deplasat.

Rezultatele exeperienței Michelson şi Morley, interpretate corect abia peste 20 de ani (1905 – Albert Einstein), au condus la trei concluzii fundamentale: 1) Nu există eter; 2) Viteza luminii în vid are valoare constantă în orice sistem de referință inerțial, independentă de starea de mişcare sau de repaus a sursei; 3) Prin nici o experiență de fizică (nu numai de mecanică) nu se poate pune în evidență mişcarea de translație a sistemului de referință inerțial (laboratorul) în care se face experiența.

4.2.3. Simultaneitatea clasică

Întreaga mecanică clasică s-a construit în ipoteza c*ă timpul are caracter absolut sau universal,* adică se scurge la fel în toate sistemele de referință, oricare ar fi mişcarea lor. Un proces fizic ar putea fi urmărit, oriunde s-ar produce, cu un singur ceasornic, aceasta subînțelegând o *viteză infinită de propagare a semnalelor*, pentru control. De aici, decurge certitudinea simultaneității pentru două evenimente care se produc în locuri diferite din spațiu, ceea ce este echivalent cu a spune că simultaneitatea are caracter absolut în mecanica clasică.

Se va examina acum simultaneitatea a două evenimente, admițând rezultatul anterior şi anume că semnalul (lumina) are în vid valoare constantă (şi foarte mare) în toate sistemele de referință inerțiale.

Se consideră două sisteme de referință inerțiale Σ şi Σ' ale căror axe Ox şi Ox' au aceeaşi direcție şi pot să alunece una față de cealaltă, iar axele Oy şi Oz rămân permanent paralele cu axele $O'y'$ şi $O'z'$ ca în fig. 4.3. Pe axa $O'x'$ a sistemului Σ' se află în repaus trei puncte *A, B* şi *C,* egal distanțate între ele, încât, $AB = BC$. Din punctul *B* se emit în acelaşi moment două semnale, unul înspre punctul *A*, iar celălalt înspre punctul *C*. Când sistemele Σ şi Σ' sunt în repaus unul față de celălalt, recepția semnalelor în *A* şi *C* se produce simultan atât în sistemul Σ, cât şi în sistemul Σ'. Când sistemul Σ' se deplasează cu viteza $\vec{V} \neq 0$ față de sistemul Σ' ca în Fig.4.3, recepția semnalelor în *A* şi *C* va fi observată diferit în cele două sisteme de referință.

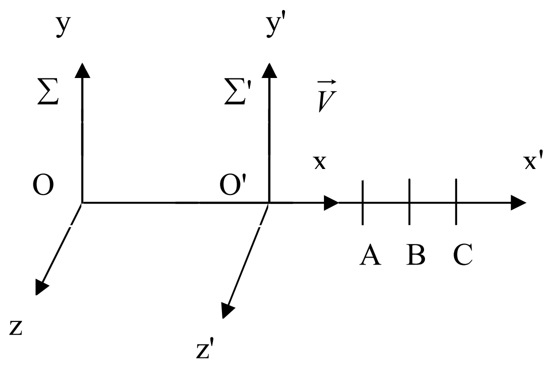


Fig. 4.3. Sistemele Σ şi Σ' având configurație specială

Observatorul aflat în sistemul Σ', în care punctele *A, B* şi *C* sunt în repaus constată recepția simultană a semnalelor în punctele *A* şi *C*. Pentru observatorul aflat în sistemul Σ, punctele *A, B*, şi *C* sunt în mişcare cu viteza *V*, astfel că după emisia semnalelor din punctul *B*, punctul *A* vine în întâmpinarea semnalului care se îndreaptă către el, iar punctul *C* se îndepărtează de semnalul care se îndreaptă către el. Deci, în sistemul Σ recepția semnalelor nu mai este simultană, ci succesivă, întâi în punctul *A* şi ulterior în punctul *C.*

Experiența imaginată conduce la concluzia că *simultaneitatea a două evenimente* (mai departe se va da definiția acestui termen) *nu are caracter absolut, ea are caracter relativ*, în raport cu sistemul de referință în care se exprima evenimentele.

Prin raționamente s-a arătat că fiecărui sistem de referință inerțial trebuie să i se asocieze un ceasornic (instrument pentru măsurarea timpului) propriu. Ceasornicele din diferite sisteme de referință inerțiale nu vor fi sincrone, ci fiecare ceasornic va indica timpul propriu al sistemului de referință. În aceast fel, *timpul nu mai are caracter absolut*, devine o mărime relativă, dependentă de mişcarea sistemului de referință. Devine astfel evident că *noțiunea de eveniment* se referă la ansamblul de patru coordonate *x, y, z, t*, trei coordonate spațiale care dau poziția corpului în sistemul de referință şi a patra coordonată temporală care este timpul măsurat de ceasornicul propiu al sistemului de referință. În locul spațiului tridimensional euclidian al mecanicii clasice, apare necesar să se folosească un spațiu cu patru dimensiuni (cvadridimensional) *Oxyzt*, în care un punct reprezintă un eveniment.

4.3. POSTULATELE TEORIEI RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE

Rezultatele experienței Michelson şi Morley, precum şi ale altor experiențe realizate sau imaginate, nu puteau fi interpretate cu ajutorul legilor mecanicii clasice. Analizând critic aceste rezultate, Albert Einstein elimină contradicțiile ivite, printr-un exercițiu de pragmatism: el neagă existența eterului ca sistem de referință absolut şi acceptă valoarea măsurată a vitezei luminii, punând bazele teoriei relativității restrânse. În anul 1905, în lucrarea sa "Asupra electrodinamicii corpurilor în mişcare", Einstein enunță cele două postulate ale teoriei relativității:

1. **Postulatul relativității einsteiniene**: *în condiții inițiale identice, toate procesele fizice (nu numai cele mecanice) se desfăşoară identic în toate sistemele de referință inerțiale.*

Acest postulat exprimă echivalența tuturor sistemelor de referință inerțiale, adică nu se poate evidenția printre sistemele de referință inerțiale un sistem de referință privilegiat (absolut). Prin nici un fel de experiență efectuată într-un sistem de referință inerțial nu poate fi pusă în evidență starea de translație rectilinie uniformă a sistemului.

Conform postulatului relativității einsteiniene, legile fizicii trebuie să fie scrise în aşa fel încât ele să rămână invariante în raport cu transformările de coordonate de la un sistem la altul. Aceste noi transformări trebuie să rezulte din postulatele teoriei relativității restrânse.

2. **Postulatul invariației vitezei luminii**: *viteza de propagare a luminii în vid (a semnalului) este aceeaşi când se exprimă în orice sistem de referință inerțial; ea nu depinde de strarea de mişcare a sursei ci este o constantă universală care este în acelaşi timp viteza maximă posibilă de propagare a interacțiilor şi a energiilor.*

Postulatul invariației vitezei maxime de propagare a interacțiilor relevă transmiterea prin *contiguitate* (din aproape în aproape) a interacțiilor fizice, excluzând posibilitatea propagării cu viteză infinită (instantanee) a interacțiilor la distanță şi consecințele acesteia.

Ulterior formulării postulatului al doilea al teoriei relativității, şi alte experiențe au confirmat independența viteza semnalului (luminii) de viteza sursei. Astfel, la emisia radiațiilor

γ de către nuclee radioactive în mişcare sau în repaus, timpii în care radiaţiile γ parcurg aceeaşi distanţă sunt aceiaşi. În 1910 Comstock şi în 1913 Sitter constată, prin observarea orbitelor stelelor duble, că viteza luminii este constantă. Mai recent, (1956) Bonci-Bruevici stabileşte prin măsurători interferometrice că razele de lumină provenite de la extremităţi diferite ale diametrului ecuatorial al Sorelui nu există nici o diferenţăde viteză.

Măsurători precise folosind tehnica laser, care pot să sesizeze variaţii de viteză foarte mici (chiar 0,03 mm/s), au arătat că viteza luminii în vid este constantă, în concordanţă cu postulatul al doilea al lui Einstein. Valoarea acceptată a acestei constante este în prezent $c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ m/s, egală cu viteza în vid a tuturor undelor electromagnetice.

3. Alături de cele două postulate enunţate în teoria relativităţii restrânse trebuie să rămână valabil **principiul de corespondenţă**, prin care fizica relativistă nu neagă mecanica clasică, ci o conţine, ca pe un caz limită. Conform principiului de corespondenţă în general, legile unui fenomen fizic obţinute cu o teorie generală trebuie să tindă într-un caz particular către legile aceluiaşi fenomen, obţinute cu o teorie cu un grad mai restrâns de generalitate.

În particular, în cazul teoriei relativităţii restrânse enunţul principiului de corespondenţă este că: *legile fizicii relativiste tind către legile mecanicii clasice când vitezele corpurilor (sau a sistemelor la care acestea se raportează), sunt neglijabile în raport cu viteza luminii în vid.*

4.4. TRANSFORMĂRILE LORENTZ SPECIALE

După formularea postulatelor teoriei relativităţii restrânse se poate trece la stabilirea transformării coordonatelor şi timpului la trecerea de la un sistem de referinţă inerţial la altul. Se folosesc aceleaşi sisteme de referinţă inerţiale Σ şi Σ' cu configuraţie specială (Fig 4.3.). Sistemul Σ' se deplasează cu viteza $\vec{V}$ în raport cu sistemul Σ în lungul axelor Ox şi $O'x'$ care coincid, în timp ce axele Oy şi Oz rămân paralele cu axele $O'y'$ şi $O'z'$. La momentul $t = t' = 0$, originile axelor de coordonate O şi O' se găsesc în acelaşi punct.

În loc de transformările Galilei pentru deducerea relaţiilor de transformare între sistemele de referinţă inerţiale Σ şi Σ', se consideră transformările liniare mai generale:

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha x' + \beta t' \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= \gamma x' + \delta t'
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

În relațiile (4.9), coordonatele pe axele care rămân paralele nu se transformă, iar coeficienții α, β, γ, δ trebuie determinați în continuare, luând *numai prima și ultima relație* din (4.9).

i) Se observă din O (originea sistemului Σ) mişcarea lui O' (originea sistemului Σ`), cu condiția amintită, ca la momentul inițial O şi O' să coincidă. Atunci $x'=0, x=Vt$ şi (4.9) devine:

$$Vt=\beta t' \qquad \text{şi} \qquad t=\delta t' \tag{4.10}$$

adică,

$$\beta=V\delta \tag{4.11}$$

ii) Folosind *postulatul relativității einsteiniene* (al echivalenței), se va observa din O' mişcarea cu viteza –V a lui O. Acum x=0, $x'=-Vt'$, iar prima relație din (4.9) se scrie:

$$0=-\alpha Vt'+\beta t' \tag{4.12}$$

şi împărțind cu $t'\neq 0$, $\beta=V\alpha$ (4.13)

şi cu (4.11), $\delta=\alpha$ (4.14)

iar relațiile (4.9) se scriu simplificat: $x=\alpha(x'+Vt')$ (4.15)

$$t=\gamma x'+\alpha t'$$

iii) Raportul relațiilor (4.15) va da o legătură între vitezele exprimate în sistemele Σ şi Σ`.

$$\frac{x}{t}=\frac{\alpha\left(x'+Vt'\right)}{\gamma x'+\alpha t'}=\frac{\alpha\left(\frac{x'}{t'}+V\right)}{\gamma\frac{x'}{t'}+\alpha} \tag{4.16}$$

Se presupune că la momentul inițial (când O şi O` coincid) din originea comună a sistemelor se emite un semnal luminos pe direcția pozitivă a axelor $Ox$ (şi *O`x`),* care, conform *postulatului invarianței vitezei luminii,* se propagă în ambele sisteme cu viteza maximă c, adică,

$$\frac{x}{t}=c \qquad \text{şi} \qquad \frac{x'}{t'}=c \tag{4.17}$$

Atunci relația (4.16) se scrie:

$$c=\frac{\alpha(c+v)}{\gamma c+\alpha} \tag{4.18}$$

de unde se exprimă:

$$\gamma=\frac{V}{c^2}\alpha \tag{4.19}$$

încât transformările generale (4.9) rămân dependente doar de coeficientul α, care trebuie şi el determinat:

$$x = \alpha(x' + \mathrm{V}t') \quad t = \alpha\left(\frac{V}{c^2}x' + t'\right) \tag{4.20}$$

iv) Din sistemul (4.20) se exprimă x`şi t` în funcție de *x* şi *t*:

$$x' = \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}\left(x - Vt\right)$$

$$t' = \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}\left(-\frac{V}{c^2}x + t\right) \tag{4.21}$$

Prin compararea sistemelor (4.20) şi (4.21), şi ținând cont de cerințele postulatului echivalenței (ca transformările inverse să se deosebească de transformările directe doar prin schimbarea lui *V* în -*V*), se impune identificarea:

$$\alpha = \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} \tag{4.22}$$

din care:

$$\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{4.23}$$

v) pentru alegerea semnului coeficientului α, se apelează la *principiul de corespondență.* La limita vitezelor mici în comparație cu viteza luminii (*V*<<*c*) , transformările (4.20) conduc la transformările Galilei dacă se ia semnul + în expresia (4.23).

După stabilirea tuturor coeficienților, sistemul de transformări (4.9) devine în final:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{\frac{V}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{4.24}$$

care reprezintă transformările Lorentz speciale. Ele exprimă matematic relativitatea poziției şi a momentului de timp ale unui eveniment. La limita nerelativistă *V*<<*c* sau $c \to \infty$, transformările Lorentz speciale trec în transformările Galilei. Transformarea inversă de coordonate şi timp de la sistemul Σ la sistemul Σ`se obține din transformările (4.24) prin înlocuirea lui *V* cu -*V*.

4.5 CONSECINȚE CINEMATICE ALE TRANFORMĂRILOR LORENTZ SPECIALE

Un sistem de referință față de care un corp sau un fenomen este în repaus se numeşte *sistem de referință propriu.* Mărimile cinematice, exprimate în sistemul de referință propriu, se numesc şi ele *mărimi proprii*: poziție proprie, viteză proprie, lungime proprie, timp propriu, interval de timp propriu etc.

Deşi prezintă unele dificultăți de intuiție pentru cei familiarizați cu mecanica newtoniană, se vor studia consecințele transformărilor Lorentz speciale asupra câtorva mărimi cinematice importante.

4.5.1 Contracția relativistă a lungimii corpurilor în mişcare

Lungimea unui corp în mişcare reprezintă distanța dintre coordonatele extremităților corpului, exprimate în sistemul de referință față de care se consideră mişcarea, şi vizate simultan (la acelaşi moment de timp) de către un observator aflat în repaus în sistemul de referință considerat.

Fie o baghetă aflată în repaus pe axa *Ox* a sistemului Σ , având coordonatele capetelor x_2 şi x_1 . Lungimea baghetei în sistemul Σ, l_0 – *lungime proprie*, este:

$$l_0 = \Delta x = x_2 - x_1 \tag{4.25}$$

Coordonatele capetelor baghetei în sistemul Σ` care se mişcă, cu viteza *V* față de sistemul Σ, sunt $x_2'$ şi $x_1'$, iar lungimea baghetei în sistemul Σ`este :

$$l' = \Delta x' = x_2' - x_1' \tag{4.26}$$

Legătura între coordonatele capetelor baghetei în sistemele Σ şi Σ` este dată de transformările Lorentz speciale,

$$x_2 \frac{x_2' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad x_1 \frac{x_1' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{4.27}$$

La momentul t` se citesc simultan coordonatele capetelor în Σ`. Din (4.27):

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \text{ sau } l_0 = \frac{l'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{4.28}$$

$$l' = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}, \text{ cu } l' < l_0 \tag{4.29}$$

adică lungimea baghetei în mişcare (față de sistemul Σ`) este mai mică decât lungimea baghetei în sistemul în care ea este în repaus (lungimea proprie). Fenomenul descris numit *contracția lungimii* este proporțional cu $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ cunoscut sub numele de *factor de contracție Lorentz-Fitzgerald.* Contracția se produce numai de-a lungul direcției de mişcare (Ox), deoarece dimensiunile corpului pe direcțiile transversale față de direcția de mişcare, conform transformărilor Lorentz speciale (4.24), rămân nemodificate, adică y`=y şi z`=z. Dacă υ_0 este volumul propriu al corpului, atunci:

$$\upsilon' = \upsilon_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{4.30}$$

unde υ' este volumul corpului în sistemul față de care corpul se mişcă cu viteza V.

La limita nerelativistă, V<<c, este valabil principiul de corespondență $l' \to l_0$, iar când V$\to$c lungimea corpului în mişcare $l' \to 0$, adică lungimea oricărui corp care s-ar mişca cu viteza luminii în vid ar fi nulă.

4.5.2 Dilatarea relativistă a timpului

De această dată se va plasa un ceasornic în originea O` a sistemului Σ`, aflat în mişcare cu viteza V față de sistemul Σ. Intervalul de timp măsurat de acesta:

$$\tau_0' = \Delta t' = t_2' - t_1' \tag{4.31}$$

este *intervalul de timp propriu* dintre două evenimente care au loc în punctual de coordonate $x' = y' = z' = 0$. În sistemul Σ aceleaşi două evenimente, conform transformărilor Lorentz speciale, se petrec la momentele:

$$t_1 = \frac{t_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \qquad t_2 = \frac{t_2'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{4.32}$$

Intervalul de timp între cele două evenimente observate în Σ este

$$\tau = \Delta t = t_2 - t_1 \tag{4.33}$$

care scris cu relațiile (4.32) şi (4.31) devine:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad \text{sau} \qquad \tau = \frac{\tau_0'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \text{ cu } \tau > \tau_0' \tag{4.34}$$

adică, pentru observatorul aflat în sistemul Σ (cel aflat în repaus) timpul se scurge mai repede decât pentru observatorul aflat în sistemul Σ` (aflat în mişcare) pentru care se spune că *timpul se dilată* (sau se încetineşte). Cu alte cuvinte, ceasornicul în mişcare merge mai lent decât ceasornicul în repaus sau extinzând, procesele fizice, biologice şi de altă natură se desfăşoară mai lent într-un sistem de referință în mişcare, decât într-unul fix. Durata minimă dintre două evenimente este indicată de ceasornicul din sistemul de referință propriu (față de care ceasornicul este în repaus) şi aceasta este intervalul de timp propriu.

Dilatarea timpului are unele implicații interesante.

a. *Relativitatea simultaneității.* Se consideră două evenimente simultane în sistemul Σ` ($\Delta t' = 0$), dar care au loc în puncte diferite ($x_1' \neq x_2'$), cum de exemplu se întâmplă la măsurarea coordonatelor capetelor baghetei în secțiunea 4.5.1. În sistemul Σ, conform transformărilor Lorentz speciale, aceleaşi evenimente se petrec la momentele

$$t_1 = \frac{\frac{V}{c^2}x_1' + t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}; \qquad t_2 = \frac{\frac{V}{c_2}x_2' + t'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c_2}}} \tag{4.35}$$

încât, intervalul de timp în sistemul Σ este

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{V}{c_2}\frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \neq 0 \tag{4.36}$$

Cele două evenimente simultane în sistemul Σ` sunt succesive în sistemul Σ`, deci *simultaneitatea are caracter relativ.*

b. *Timpul de viață al particulelor elementare.* Conform relației (4.34), pentru un observator din sistemul Σ, ceasornicul din sistemul Σ`, rămâne în urmă în raport cu ceasornicul din sistemul propriu Σ. Verificarea acestei afirmații se poate proba în cazul mezonilor μ şi π.

Mezonii μ (miuonii) sunt particule elementare uşoare care se formează în straturile superioare ale atmosferei terestre, la impactul acesteia cu radiația cosmică.

Pentru miuonii obținuți în laborator prin dezintegrarea nucleelor, Rossi a obținut timpul de viață $\tau_0' = 2 \cdot 10^{-6} s$ (interval de timp propriu). Aceşti miuoni, chiar dacă s-ar deplasa cu viteza luminii, ar parcurge doar spațiul $c \cdot \tau'_0 = 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 600m$, ceea ce nu explică de ce miuonii produşi la zeci de kilometri deasupra solului ajung la suprafața Pământului.

Explicația este următoarea. Timpul de viață al miuonilor proveniți din radiația cosmică, față de Pământ, presupunând că ei se deplasează cu viteza V=0,999 c, este, conform relației (4.34):

$$\tau = \frac{\tau'_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \approx 5 \cdot 10^{-5} s$$

În acest interval de timp miuonii ar putea parcurge aproximativ 15 km, şi astfel ar ajunge să fie detectați la suprafața Pământului.

4.5.3 Transformarea relativistă a vitezelor

Se consideră ca şi până acum sistemul inerțial Σ`care se mişcă cu viteza $\vec{V}$ față de sistemul Σ, păstrând configurația specială din fig 4.3.

Se consideră de asemenea un punct material *P*, în mişcare, care se raportează la cele două sisteme de referință, având o anumită poziție exprimată prin coordonatele x, y, z la momentul t în sistemul Σ şi prin coordonatele x`, y`, z` la momentul t` în sistemul Σ`.

Componentele vitezei $\vec{v}$ a punctului *P* în sistemul Σ sunt:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}, \tag{4.37}$$

iar ale vitezei $\vec{v}'$ a punctului *P* în sistemul Σ` sunt:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \qquad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \qquad v'_z = \frac{dz'}{dt'} \tag{4.38}$$

Se vor stabili relațiile de legătură între componentele vitezelor (4.37) şi (4.38) în cadrul teoriei relativității restânse. În transformările Lorentz speciale (4.24) se foloseşte notația

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{4.39}$$

şi apoi se diferențiază relațiile (4.24), obținându-se:

$$\begin{aligned} dx &= \gamma(dx' + Vdt') \\ dy &= dy' \\ dz &= dz' \\ dt &= \gamma(\frac{V}{c^2}dx' + dt') \end{aligned} \tag{4.40}$$

Pe baza definițiilor (4.37) şi (4.38) şi a diferențialelor (4.40) se stabilesc *relațiile de transformare relativistă a componentelor vitezei:*

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{\frac{V}{c^2} dx' + dt'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{\frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'} + 1} = \frac{v'_x + V}{\frac{V}{c^2} v'_x + 1} \tag{4.41}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(\frac{V}{c^2} dx' + dt'\right)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(\frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'} + 1\right)} = \frac{v'_y}{\gamma\left(\frac{V}{c^2} v'_x + 1\right)} \tag{4.41}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma\left(\frac{V}{c^2} dx' + dt'\right)} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma\left(\frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'} + 1\right)} = \frac{v'_z}{\gamma\left(\frac{V}{c^2} v'_x + 1\right)} \tag{4.41}$$

La limita nerelativistă V<<c, $\gamma \to 1$, iar transformările (4.41) se reduc la regula lui Galilei de compunere a vitezelor.

Revenind la viteze comparabile cu viteza luminii, se urmăreşte propagarea unui semnal luminos (foton) în lungul axei O`x`. Atunci, $v'_x = c$ şi cu prima dintre relațiile (4.41) se calculează viteza fotonului de-a lungul axei Ox:

$$v_x = \frac{c + V}{\frac{V}{c^2} c + 1} = c \tag{4.42}$$

ceea ce confirmă postulatul constantei vitezei luminii. Chiar dacă se presupune că şi V=c, atunci din prima relație (4.41) se obține:

$$v_x = \frac{c + c}{\frac{c}{c^2} c + 1} = c \tag{4.43}$$

Rezultatul că *c* este limita maximă a vitezelor este concluzia majoră a teoriei relativității. Teoria relativității nu exclude însă posibilitatea unor viteze pur geometrice mai mari decât viteza luminii, dar acestea nu sunt viteze de transport de informație sau energie.