7. ELEMENTE DE DINAMICĂ

Dinamica este partea din mecanică care studiază comportarea sistemelor mecanice supuse acțiunilor exterioare. Pe lângă noțiunile de cinematică (viteză, accelerație, viteză unghiulară, accelerație unghiulară) şi cele din cinetică (impuls, moment cinetic, energie cinetică), în dinamică se mai folosesc şi alte noțiuni fundamentale: forță, lucru mecanic, potențial, putere.

7.1. Noțiuni fundamentale

7.1.1. Forța

Forța caracterizează acțiunea mecanică a unui sistem mecanic sau fenomen fizic asupra altui sistem mecanic. Mai general, forța este un aspect al interacțiunii mecanice dintre corpurile şi fenomenele din univers.

Acțiunea unei forțe asupra unui sistem material se poate face prin contact direct sau de la distanță prin intermediul câmpurilor fizice.

Experiența arată că forța este un vector, care, în general, este legat de punctul său de aplicație, având prin urmare toate proprietățile vectorilor. Unitatea internațională de măsură pentru forță este newtonul (simbolizat N).

Se postulează că forța este un vector obiectiv, adică mărimea sa nu depinde de sistemul de referință ales, precum şi faptul că acțiunea exercitată prin forță se transmite instantaneu (în mecanica relativisită viteza de transmitere a acestei acțiuni este limitată).

7.1.2. Cuplul

Deoarece o forță acționează în punctul său de aplicație, în cazul punctelor materiale, dacă asupra unui punct acționează mai multe forțe, acestea pot fi înlocuite prin rezultanta lor.

În cazul unui solid rigid, asupra acestuia pot acționa forțe care au puncte de aplicație diferite. Prezintă interes cazul în care asupra solidului acționează două forțe egale ca mărime, paralele dar de sens opus (fig.7.1).

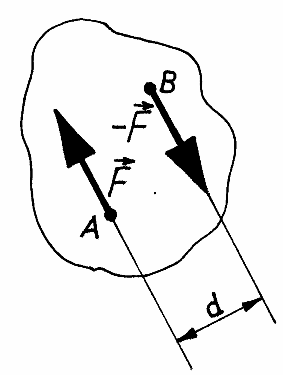

Fig. 7.1

Torsorul de reducere al celor doi vectori într-un punct O, oarecare, este format din:

- vectorul rezultantă: $\vec{R} = \vec{0}$;
- vectorul moment rezultant în punctul O: $\vec{M_O} = \vec{BA} \times \vec{F}$.

Se observă că torsorul de reducere al celor două forțe nu depinde de punctul în care se face reducerea şi este format numai din vectorul moment rezultant. Se spune că aceste forțe formează un *cuplu* (*moment*), care ste un vector liber, punctul de aplicație al acestuia putând fi orice punct al solidului rigid.

În acest fel în locul celor două forțe se poate considera că asupra solidului rigid acționează momentul acestora. Este de precizat faptul că asupra solidului rigid pot acționa atât forțe cât şi cupluri (momente) pe când asupra punctelor materiale pot acționa numai forțe.

Unitatea de măsură pentru moment este N·m.

7.1.3. Lucru mecanic. Potențial. Putere

Se consideră o forță $\vec{F}$ al cărei punct de aplicație se deplasează pe o curbă (C) (fig. 7.2).

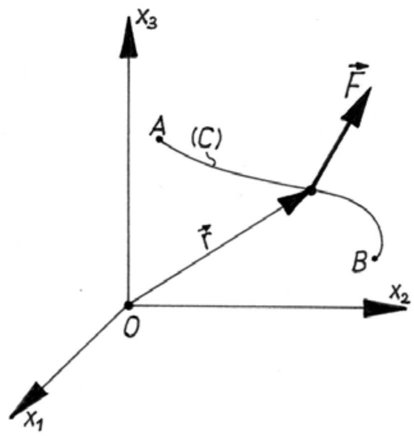

Fig.7.2

Definiție. Circulația vectorului $\vec{F}$ pe curba (C) se numeşte *lucrul mecanic* al forței $\vec{F}$ pe curba (C), deci:

$$L = \int_{(C)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{7.1}$$

Unitatea de măsură a lucrului mecanic este joule (J).

Forța $\vec{F}$ din (7.1) depinde, în cazul cel mai general, atât de poziție cât şi de timp, deci $\vec{F} = \vec{F}\left(\vec{r};t\right) = \vec{F}\left(x_1;x_2;x_3;t\right)$. Dacă forța $\vec{F}$ are un caracter irotațional (adică $rot\,\vec{F} = \vec{0}$) atunci există o funcție V, numită *potențial* asociat lui $\vec{F}$, astfel încât:

$$\vec{F} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\vec{i_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\vec{i_2} + \frac{\partial V}{\partial x_3}\vec{i_3}\right). \tag{7.2}$$

În acest caz, lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ este:

$$L = \int_{(C)} -\nabla F \cdot d\vec{r} = -\int_{(C)} \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}dx_3\right) = -\int_{(C)} dV = V(A;t) - V(B;t) \tag{7.3}$$

Prin urmare, în acest caz, lucrul mecanic nu depinde de drum ci numai de poziția inițială şi poziția finală a punctului de aplicație a forței $\vec{F}$.

Deoarece $dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$, potențialul asociat unui câmp de forțe conservativ se calculează cu relația:

$$V(M;t) = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} + ct. \tag{7.4}$$

Se prezintă în continuare câteva exemple de forțe pentru care se determină potențialul:

a) $\vec{F} = \vec{K}$ (vector constant)

$$V=-\int \vec{K}\cdot d\vec{r}+ct=-\vec{K}\cdot\vec{r}+ct\,; \tag{7.5}$$

b) $\vec{F}=K\cdot r^{n}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$, în care $r=\left|\vec{r}\right|$, $n\neq-1$, $K\in\Re$

$$V=-\int K\cdot r^{n}\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r}=-\int Kr^{n}dr=-\frac{K}{n+1}r^{n+1}+ct\,. \tag{7.6}$$

S-a ținut cont că din $\vec{r}^{\,2}=r^{2}$ rezultă, prin diferențiere, că $\vec{r}\cdot d\vec{r}=rdr$.

c) $\vec{F}=\phi(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}$, în care $\phi(r)$ este o funcție care depinde numai de modulul vectorului de poziție $\vec{r}$. Atunci:

$$V=-\int\phi(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r}=-\int\phi(r)dr\,. \tag{7.7}$$

Se consideră cazul unui punct asupra căruia acționează un sistem de forțe $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...,\vec{F}_n$ fiecare având potențialul $V_1,V_2,...,V_n$. Potențialul rezultantei este:

$$V=-\int\vec{F}\,d\vec{r}+ct=-\int\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,d\vec{r}+ct=V_1+V_2+...+V_n=\sum_{i=1}^{n}V_i \tag{7.8}$$

adică suma potențialelor celor n forțe care acționează asupra punctului.

Forma diferenială:

$$\delta L=\vec{F}\,d\vec{r} \tag{7.9}$$

se numește *lucrul mecanic elementar* al forței $\vec{F}$. În (7.9) s-a folosit notația δL și nu dL deoarece, în general, lucrul mecanic elementar nu este o diferențială exactă.

Prin definiție *puterea* asociată forței $\vec{F}$ este dată de:

$$P=\frac{\delta L}{dt}\,. \tag{7.10}$$

Rrezultă că:

$$P=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}\,. \tag{7.11}$$

În cazul unui cuplu $\vec{M}$ puterea se calculează cu relația:

$$P=\vec{M}\cdot\vec{\omega} \tag{7.12}$$

în care $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară a solidului rigid asupra căruia acționează cuplul M.

Unitatea de măsură pentru putere este wattul (1W = 1J/1s).

7.2. Axiomele mecanicii punctului material

Elaborarea modelelor matematice pentru mişcările punctelor materiale şi sistemelor de puncte materiale se face pe baza următoarelor axiome:

Axioma AP1 (principiul inerţiei). Există un sistem de referinţă, numit *sistem de referinţă inerţial*, faţă de care un punct material asupra căruia nu acţionează nici o forţă ($\vec{F} = \vec{0}$ la orice moment) se găseşte fie în repaus fie în mişcare rectilinie şi uniformă.

Axioma AP2. Faţă de un sistem de referinţă inerţial:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \quad \text{(ecuaţia Newton)} \tag{7.13}$$

în care:

- m este masa punctului material;
- $\vec{a}$ este acceleraţia punctului material faţă de reperul inerţial;
- $\vec{F}$ este rezultanta forţelor care acţionează asupra punctului material.

Observaţie. Relaţia (7.13) face legătura între unitatea de măsură a forţei şi unităţile de măsură pentru masă, spaţiu şi timp. Astfel newtonul este forţa care imprimă unui punct material de masă 1 kg o acceleraţie de 1 m/s^2, faţă de un sistem de referinţă inerţial.

Axioma AP3 (principiul acţiunii şi reacţiunii). Dacă se consideră un sistem material izolat format din două puncte materiale M_1 şi M_2 şi dacă $\vec{F}_{12}$ este forţa cu care M_1 acţionează asupra lui M_2 şi $\vec{F}_{21}$ este forţa cu care M_2 acţionează asupra lui M_1, atunci:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0} \tag{7.14}$$

Principiul acţiunii şi reacţiunii poate fi extins astfel: forţele cu care interacţionează două sisteme materiale sunt egale şi de sens contrar.

Trebuie menţionat că aceste axiome se folosesc faţă de un sistem de referinţă inerţial a cărei existenţă a fost postulată de axioma AP1.

În mecanică nu s-a găsit un sistem de referinţă practic inerţial, de aceea se acceptă unele repere ca fiind inerţiale, cu introducerea unor aproximaţii în elaborarea modelelor matematice şi determinarea legilor de mişcare. În funcţie de gradul de precizie dorit se acceptă ca inerţiale următoarele repere:

- sistemul inerţial terestru (SIT) care este un reper propriu ataşat geoidului terestru, asimilat cu un solid rigid;
- sistemul inerţial geocentric (SIG) cu originea în centrul Pământului şi axele orientate spre trei stele foarte îndepărtate;
- sistemul inerţial heliocentric (SIH) cu originea în centrul Soarelui şi axele îndreptate spre trei stele foarte îndepărtate;
- sistemul inerţial galactic (SIGL) cu originea în centrul Galaxiei şi axele orientate către alte galaxii.

Fiecare din aceste repere este adecvat pentru o anumită gamă de probleme. Pentru problemele curente, care apar în tehnică, se foloseşte sistemul inerţial terestru.

Pentru elaborarea modelelor mişcărilor punctelor materiale şi sistemelor de puncte materiale, setului de axiome de mai sus i se mai adaugă încă una:

Axioma AP4 (axioma legăturilor sau axioma Cauchy): orice legătură impusă unui punct material poate fi substituită cu o forţă de legătură.

7.3. Axiomele mecanicii mediului material continuu

Deoarece un mediu material continuu nu poate fi privit ca o reuniune infinită de puncte materiale, axiomele expuse pentru punctul material nu pot fi aplicate în cazul mediului material continuu. Este deci necesar să se introducă un nou set de axiome.

Pentru început se va face o trecere în revistă a forţelor şi cuplurilor care acţionează mediilor materiale continue.

7.3.1. Forţe şi cupluri care acţionează asupra unui mediu material continuu

Se consideră un mediu material continuu care, instantaneu, ocupă un domeniu spațial $D(t)$ cu frontiera $S(t)$.

Forțele care pot acționa asupra acestui mediu material se pot clasifica în:

- *forțe masice* – care sunt repartizate continuu în toate punctele domeniului $D(t)$.

Rezultanta acestor forțe este:

$$\vec{F}_m = \iiint\limits_{D(t)} \vec{f}\left(\vec{r}\,;\dot{\vec{r}}\,;t\right)\cdot\rho\left(\vec{r}\,;t\right)dV \tag{7.15}$$

în care:

- $\vec{f}\left(\vec{r}\,;\dot{\vec{r}}\,;t\right)$ este intensitatea forțelor masice, cu unitatea de măsură N/kg;
- $\rho\left(\vec{r}\,;t\right)$ este masa specifică volumică (în kg/m^3);
- dV este elementul de volum din $D(t)$.

După cum se observă intensitatea forțelor masice este o funcție vectorială care depinde de timp, poziția punctului considerat dar şi de viteza sa.

- *forțe superficiale* – care sunt repartizate continuu în toate punctele suprafeței $S(t)$ sau eventual ale unei submulțimi a acesteia.

Rezultanta acestor forțe este:

$$\vec{F}_s = \iint\limits_{S(t)} \vec{T}\left(\vec{r}\,;\dot{\vec{r}}\,;t\right)dS \tag{7.16}$$

în care:

- $\vec{T}\left(\vec{r}\,;\dot{\vec{r}}\,;t\right)$ este intensitatea forțelor superficiale;
- dS elementul de arie pe suprafața $S(t)$.

Unitatea de măsură pentru intensitatea forțelor masice este N/m^2. Evident că şi forțele superficiale depind tot de timp, poziție şi viteză.

- *forțele concentrate* care acționează în anumite puncte ale mediului material.

Rezultanta acestor forțe este:

$$\vec{F}_c = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\left(\vec{r}_i\,;\dot{\vec{r}}_i\,;t\right) \tag{7.17}$$

Cuplurile care pot acționa asupra unui mediu material continuu se pot clasifica, la rândul lor, în:

- *cupluri masice* – care sunt distribuite în toate punctele domeniului $D(t)$.

Momentul rezultant al acestor cupluri este:

$$\vec{M}_m = \iiint_{D(t)} \vec{m}\left(\vec{r};\dot{\vec{r}};t\right)\cdot\rho\left(\vec{r};t\right)dV \tag{7.18}$$

în care:

- $\vec{m}\left(\vec{r};\dot{\vec{r}};t\right)$ este intensitatea cuplurilor masice, cu unitatea de măsură Nm/kg, care au aceeaşi dependenţă ca în cazul precedent, al forţelor masice;

- *cupluri superficiale* – care sunt distribuite pe suprafaţa exterioară $S(t)$.

Momentul rezultant al acestor cupluri este:

$$\vec{M}_s = \iint_{S(t)} \vec{\mu}\left(\vec{r};\dot{\vec{r}};t\right)dS \tag{7.19}$$

$\vec{\mu}\left(\vec{r};\dot{\vec{r}};t\right)$ este intensitatea cuplurilor superficiale, măsurată în Nm/m^2.

- *cupluri concentrate*, $\vec{M}_j\left(\vec{r}_j;\dot{\vec{r}}_j;t\right)$, $j=\overline{1;p}$, cu momentul rezultant:

$$\vec{M}_c = \sum_{j=1}^{p} \vec{M}_j\left(\vec{r}_j;\dot{\vec{r}}_j;t\right) \tag{7.20}$$

Trebuie menţionat că forţele şi cuplurile concentrate nu pot acţiona decât la medii materiale de tip solid.

Torsorul de reducere într-un punct O (care în particular poate fi originea sistemului de referinţă) al forţelor şi cuplurilor care acţionează asupra mediului material este format din:

- vectorul rezultantă care se calculează cu relaţia:

$$\vec{F} = \iiint_{D(t)} \vec{f}\cdot\rho dV + \iint_{S(t)} \vec{T}\, dS + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i \tag{7.21}$$

- vectorul moment rezultant în punctul O:

$$\vec{M}_O = \iiint_{D(t)} \vec{m}\cdot\rho dV + \iint_{S(t)} \vec{\mu}\, dS + \sum_{j=1}^{p}\vec{M}_j + \iiint_{D(t)} \vec{r}\times\vec{f}\,\rho dV + \iint_{S(t)} \vec{r}\times\vec{T}\, dS + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times\vec{F}_i \tag{7.22}$$

7.3.2. Axiomele mecanicii mediului material continuu

Mecanica mediului material continuu se bazează pe următorul set de axiome:

Axioma AC1 (axioma condiţiilor iniţiale). Pentru a se cunoaşte univoc poziţia oricărui punct al mediului material continuu la orice moment, este necesar ca la momentul iniţial să se cunoască poziţia şi viteza oricărui punct al mediului material continuu.

Axioma AC2 (axioma invariantei masei). Masa oricărui subdomeniu $\Delta(t)$, inclus în $D(t)$, este constantă în timp:

$$m_{\Delta(t)} = ct. \qquad \forall t \geq 0 \ . \tag{7.23}$$

Axioma AC3 (axioma lui Cauchy). Dacă din domeniul ocupat de mediul material continuu se detaşează un subdomeniu $\Delta(t)$ este necesar şi suficient ca pe suprafaţa acestui subdomeniu să se introducă o distribuţie continuă de forţe superficiale şi cupluri superficiale.

Trebuie menţionat faptul că distribuţia de cupluri superficiale se face numai la medii materiale cu mobilităţi interne de tip rotaţie (medii granulare).

Axioma AC4 (axioma derivatei impulsului). Dacă $\vec{H}_{\Delta(t)}$ este impulsul faţă de un sistem de referinţă inerţial al unui subdomeniu $\Delta(t)$ al mediului material continuu atunci:

$$\dot{\vec{H}}_{\Delta(t)} = \vec{F} \tag{7.24}$$

unde $\vec{F}$ este rezultanta tuturor forţelor care acţionează asupra subdomeniului $\Delta(t)$.

Axioma AC5 (axioma derivatei momentului cinetic). Dacă $\vec{K}_{O,\Delta(t)}$ este momentul cinetic al subdomeniului $\Delta(t)$ faţă de un punct O al unui sistem de referinţă inerţial, atunci:

$$\dot{\vec{K}}_{O,\Delta(t)} = \vec{M}_O \tag{7.25}$$

în care $\vec{M}_O$ este momentul rezultant în punctul O al tuturor forţelor şi cuplurilor care acţionează asupra subdomeniului $\Delta(t)$.

Se observă că ecuaţiile care guvernează mişcarea mediilor materiale continue se aplică, ca şi în cazul punctului material, faţă de un sistem de referinţă inerţial.

7.4.Aplicaţii

Aplicaţia 7. 1: Se consideră următoarele câmpuri de forţe:

a) $\vec{F} = x_2^2 x_3 \vec{i_1} + \left(2x_1 x_2 x_3 + 1\right)\vec{i_2} + x_1 x_2^2 \vec{i_3}$

b) $\vec{F} = \dfrac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}\vec{i_1} + \dfrac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2}\vec{i_2} + 2x_3 \vec{i_3}$

c) $\vec{F} = \left(2x_1 x_2 + x_2^2\right)\vec{i_1} + \left(x_1^2 + 2x_1 x_2\right)\vec{i_2}$

Să se precizeze dacă acestea admit potenţial şi în caz afirmativ să se determine axpresia acestuia.

Rezolvare: Pentru un câmp de forţe:

$$\vec{F} = F_1\left(x_1;x_2;x_3\right)\vec{i_1} + F_2\left(x_1;x_2;x_3\right)\vec{i_2} + F_3\left(x_1;x_2;x_3\right)\vec{i_3}$$

condiţia ca acesta să fie iraţional, deci să aibă potenţial este:

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_3}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \tag{7.26}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}=\frac{\partial F_1}{\partial x_2}$$

a) Se obține imediat:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}=2x_2x_3\,;\quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3}=x_2^2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}=2x_2x_3\,;\quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3}=2x_1x_2$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1}=x_2^2\,;\quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2}=2x_1x_2$$

Se observă că sunt îndeplinite relațiile (7.26), deci există potențialul V, acesta obținându-se elementar cu (7.4):

$$V=-\left(x_1x_2^2x_3+x_2\right)$$

b) Se obține imediat:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}=\frac{-4x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\,;\quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}=\frac{-4x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\,;\quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1}=0\,;\quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2}=0$$

Sunt verificate condițiile (7.26) deci există potențial. Acesta este:

$$V=-\left[x_3^2+\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)\right]$$

c) Se obține:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}=2x_1+2x_2\,;\quad \frac{\partial F_1}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}=2x_1+2x_2\,;\quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_1}=0\,;\quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2}=0$$

Sunt verificate condițiile (7.26). Potențialul atașat câmpului de forțe este:

$$V=-x_1x_2\left(x_1+x_2\right).$$