6. CINETICA

Cinetica face legătura între cinematică, care caracterizează mişcarea sistemului mecanic, şi geometria maselor care studiază distribuția masei sistemului material. Au apărut astfel mărimi mecanice care caracterizează comportarea sistemului material în procesul de mişcare mecanică în condițiile interacțiunii cu alte sisteme, a influențelor pe care le suferă şi le exercită. Aceste mărimi sunt impulsul, momentul cinetic şi energia cinetică.

6.1. Impulsul

Fie un sistem material format din n puncte materiale M_i, de masă m_i, $i=\overline{1,n}$, p curbe materiale (C_k), $k=\overline{1,p}$, suprafețe materiale (S_l), $l=\overline{1,u}$, v volume materiale (D_j), $j=\overline{1,v}$, raportate la un sistem de referință T.

Impulsul sistemului material față de reperul T este, prin definiție:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i + \sum_{k=1}^{p} \int_{(C_k)} \vec{v}\, \rho\, ds + \sum_{l=1}^{n} \iint_{(S_l)} \vec{v}\, \rho\, d\sigma + \sum_{j=1}^{v} \iiint_{(D_j)} \vec{v}\, \rho\, d\tau . \tag{6.1}$$

în care:

- m_i este masa punctului material M_i;
- $\vec{v}_i$ este viteza punctului M_i față de reperul T;
- $\vec{v}$ este viteza punctului curent al varietății geometrice materiale (curbă materială, suprafață materială, volum material), față de reperul T;
- ρ este masa specifică (liniară, superficială sau volumică, după caz).

Unitatea de măsură a impulsului este kg m/s. Impulsul mai poartă şi numele de cantitate de mişcare, fiind una din mărimile care stau la baza principiilor mecanicii.

Impulsul unui sistem material se poate calcula cu relația:

$$\vec{H} = m \cdot \vec{v}_C \tag{6.2}$$

în care m este masa sistemului material, iar $\vec{v}_C$ este viteza centrului de masă al sistemului material față de reperul T.

Demonstrație: Se va determina relația (6.2) în cazul sistemului de puncte materiale şi în cazul solidului rigid.

În cazul unui sistem de puncte materiale vectorul de poziție al centrului de masă, față de reperul T se calculează cu relația:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i .$$

Prin derivare în raport cu timpul rezultă:

$$\dot{\vec{r}}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i .$$

Dar $\dot{\vec{r}}_C = \vec{v}_C$ este viteza centrului de masă, iar $\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i$ este viteza punctului M_i, deci:

$\vec{v}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$, de unde rezultă imediat relația (6.2).

În cazul solidului rigid, considerat volum material (demonstrația este identică pentru curbă materială rigidă sau suprafață materială rigidă), cu definiția (6.1) a impulsului se obține:

$$\vec{H} = \iiint_{(D)} \vec{v} \, \rho \, d\tau . \tag{6.3}$$

Viteza punctului curent al rigidului se calculează cu relația Euler:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} .$$

Înlocuind în (6.3) şi ținând cont că viteza originii reperului propriu $\vec{v}_O$ şi viteza unghiulară a solidului rigid $\vec{\omega}$ nu depind de punctul curent se obține:

$$\vec{H} = \vec{v}_O \cdot \iiint_{(D)} \rho \, d\tau + \vec{\omega} \times \iiint_{(D)} \vec{r} \, \rho \, d\tau .$$

Dar:

$\iiint_{(D)} \rho \, d\tau = m$ este masa solidului rigid iar $\iiint_{(D)} \vec{r} \, \rho \, d\tau = m \vec{r}_C$, în care $\vec{r}_C$ este vectorul de poziție al centrului de masă al rigidului față de reperul propriu. Prin urmare:

$$\vec{H} = m \left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_C \right) = m \cdot \vec{v}_C$$

deoarece $\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_C = \vec{v}_C$ este chiar viteza centrului de masă.

Relația (6.2) este valabilă pentru orice tip de sistem material, deformabil sau nedeformabil, demonstrația pe cazul general se poate face ținându-se cont de regulile de derivare ale integralelor, reguli care se vor stabili ulterior, folosind ecuația de continuitate a masei.

6.2. Momentul cinetic

Momentul cinetic al unui sistem material față de un punct O este prin definiție:

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_{k=1}^{p} \int_{(C_k)} \vec{r} \times \vec{v} \, \rho \, ds + \sum_{l=1}^{n} \iint_{(S_l)} \vec{r} \times \vec{v} \, \rho \, d\sigma + \sum_{j=1}^{v} \iiint_{(D_j)} \vec{r} \times \vec{v} \, \rho \, d\tau$$

(6.4)

în care:

- $\vec{r}_i$ este vectorul de poziție al punctului material M_i, $i = \overline{1,n}$, față de O;
- $\vec{r}$ este vectorul de poziție față de O al unui punct curent al varietății geometrice materiale, iar ceilalți termeni au aceeaşi semnificație ca în relația (6.1).

Unitatea de măsură a momentului cinetic este Kg m^2/s.

Un caz particular îl prezintă momentul cinetic al solidului rigid. După cum se ştie solidul rigid este raportat la un sistem de referinţă propriu şi un sistem de referinţă exterior. Momentul cinetic al solidului rigid faţă de originea reperului propriu este:

$$\vec{K}_O = \iiint_{(D)} \vec{r} \times \vec{v}\, \rho\, d\tau = \iiint_{(D)} \vec{r} \times \left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} \right) \rho\, d\tau = \iiint_{(D)} \vec{r} \times \vec{v}_O\, \rho\, d\tau + \iiint_{(D)} \vec{r} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) \rho\, d\tau =$$

$$= \iiint_{(D)} \vec{r}\, \rho\, d\tau \times \vec{v}_O + \iiint_{(D)} \left\{ \vec{i} \right\}^t [r][r]^t \{\omega\} \rho\, d\tau = m\, \vec{r}_C \times \vec{v}_O + \left\{ \vec{i} \right\}^t \iiint_{(D)} [r][r]^t \{\omega\} \rho\, d\tau$$

Dar $\iiint_{(D)} [r][r]^t \rho\, d\tau = \left[J_P \right]$ este matricea de inerţie faţă de reperul propriu. Se obţine:

$$\vec{K}_O = m\, \vec{r}_C \times \vec{v}_O + \overset{\Rightarrow}{J}_P\, \vec{\omega} \tag{6.5}$$

în care $\overset{\Rightarrow}{J}_P$ este tensorul de inerţie al solidului rigid faţă de reprul propriu.

Dacă se notează cu $\vec{R}$ vectorul de poziţie al punctului curent al solidului rigid faţă de reperul exterior atunci momentul cinetic al rigidului faţă de origine O_0 a reperului este:

$$\vec{K}_{O_0} = \iiint_{(D)} \vec{R} \times \vec{v}\, \rho\, d\tau = \iiint_{(D)} \left(\vec{R}_O + \vec{r} \right) \times \vec{v}\, \rho\, d\tau = \iiint_{(D)} \vec{R}_O \times \vec{v}\, \rho\, d\tau + \iiint_{(D)} \vec{r} \times \vec{v}\, \rho\, d\tau =$$

$$= \vec{R}_O \times \iiint_{(D)} \vec{v}\, \rho\, d\tau + \vec{K}_O = \vec{R}_O \times \vec{H} + \vec{K}_O \tag{6.6}$$

Dacă se ţine cont de (6.2) şi (6.5) se obţine:

$$\vec{K}_{O_0} = m\, \vec{R}_O \times \vec{v}_C + m\, \vec{r}_C \times \vec{v}_O + \overset{\Rightarrow}{J}_P\, \vec{\omega} \tag{6.7}$$

Cazuri particulare :

a) Solidul rigid în mişcare de translaţie:

$$\vec{K}_O = m\, \vec{r}_C \times \vec{v}_O \text{ , adică } \vec{K}_{O_0} = m\, \vec{R}_O \times \vec{v}_C + m\, \vec{r}_C \times \vec{v}_O \tag{6.8}$$

Dacă se alege reperul propriu cu originea în centrul de masă al rigidului atunci:

$$\vec{K}_O = \vec{0} \text{ , rezultă } \vec{K}_{O_0} = m\, \vec{R}_C \times \vec{v}_C \tag{6.9}$$

b) Solid rigid în mişcare de rotaţie:

$$\vec{K}_O = J_{13}\, \omega\, \vec{i}_1 + J_{23}\, \omega\, \vec{i}_2 + J_{33}\, \omega\, \vec{i}_3 \tag{6.10}$$

6.3. Energia cinetică

Energia cinetică a unui sistem material faţă de un reper T este:

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} + \sum_{k=1}^{p} \int_{(C_k)} \frac{1}{2} \vec{v}^{\,2} \rho\, ds + \sum_{l=1}^{u} \iint_{(S_l)} \frac{1}{2} \vec{v}^{\,2} \rho\, d\sigma + \sum_{j=1}^{v} \iiint_{(D_j)} \frac{1}{2} \vec{v}\, \rho\, d\tau \,. \tag{6.11}$$

În cazul unui solid rigid:

$$T=\frac{1}{2}\iiint_{(D)}\vec{v}^{\,2}\rho\,d\tau=\frac{1}{2}\iiint_{(D)}\{v\}^t\{v\}\rho\,d\tau=\frac{1}{2}\iiint_{(D)}\left(\{v_O\}^t+\{\omega\}^t[r]\right)\left(\{v_O\}+[r]^t\{\omega\}\right)\rho\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_{(D)}\left(\{v_O\}^t\{v_O\}+\{v_O\}^t[r]^t\{\omega\}+\{\omega\}^t[r]\{v_O\}+\{\omega\}^t[r][r]^t\{\omega\}\right)\rho\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\{v_O\}^t\{v_O\}\iiint_{(D)}\rho\,d\tau+\frac{1}{2}\{v_O\}^t\iiint_{(D)}[r]^t\{\omega\}\rho\,d\tau+\frac{1}{2}\{\omega\}^t\iiint_{(D)}[r]\{v_O\}\rho\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\{\omega\}^t\iiint_{(D)}[r][r]^t\{\omega\}\rho\,d\tau=\frac{1}{2}m\{v_O\}^t\{v_O\}+\frac{1}{2}m\{v_O\}^t[r_C]^t\{\omega\}+\frac{1}{2}m\{\omega\}^t[r_C]\{v_O\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{\omega\}^t[J_P]\{\omega\}.$$

Dacă se ține cont că: $\{v_O\}^t[r_C]^t\{\omega\}=\{\omega\}^t[r_C]\{v_O\}=\{v_O\}^t[\omega]\{r_C\}$ se obține:

$$T=\frac{1}{2}m\{v_O\}^t\{v_O\}+m\{v_O\}^t[\omega]\{r_C\}+\frac{1}{2}\{\omega\}^t[J_P]\{\omega\} \tag{6.12}$$

Vectorial, se scrie: $T=\frac{1}{2}m\,\vec{v}_O^{\,2}+m\left(\vec{v}_O;\vec{\omega};\vec{r}_C\right)+\frac{1}{2}\vec{\omega}\left(\overset{\Rightarrow}{J}_P\,\vec{\omega}\right)$ (6.13)

Cazuri particulare :

a) Solid rigid în mişcare de translație: $T=\frac{1}{2}m\,\vec{v}_O^{\,2}$ (6.14)

b) Solid rigid în mişcare de rotație: $T=\frac{1}{2}J_\Delta\,\vec{\omega}^{\,2}$ (6.15)

în care J_Δ este momentul de inerție al solidului rigid față de axa de rotație.

c) Solid în mişcare plană:

Dacă se alege axa Ox_3 a reperului propriu astfel ca să treacă prin centrul de masă C al solidului rigid avem $x_{1C}=x_{2C}=0$, $\vec{v}_O=\vec{v}_C$, $J_{33}=J_{\Delta_C}$ (momentul de inerție al rigidului în raport cu o axă normală la planul mişcării şi care trece prin centrul de masă C), atunci:

$$T=\frac{1}{2}m\,\vec{v}_C^{\,2}+\frac{1}{2}J_{\Delta_C}\,\vec{\omega}^{\,2} \tag{6.16}$$

d) Solid rigid cu punct fix: se alege reperul propriu cu originea în punctul fix şi se obține:

$$T=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\overset{\Rightarrow}{J}_P\,\vec{\omega}\right) \tag{6.17}$$

Dacă impulsul şi momentul cinetic sunt mărimi vectoriale, energia cinetică este o mărime scalară, pozitivă şi poate fi privită ca o mărime de stare. Unitatea de măsură a energiei cinetice este kg m^2/s^2=J (Joule). Dacă se alege originea reperului propropiu în centrul de masă al rigidului relația (6.13) devine:

$$T=\frac{1}{2}m\,\vec{v}_C^{\,2}+\frac{1}{2}\vec{\omega}\left(\overset{\Rightarrow}{J}_P\,\vec{\omega}\right) \tag{6.18}$$

Această relație exprimă faptul că energia cinetică a unui solid rigid este suma dintre energia cinetică a centrului de masă, în care se consideră concentrată întreaga masă şi energia cinetică a mişcării de rotație a corpului în jurul propriului său centru de masă. Aceasta este importanta *teoremă* a *lui Koenig* referitoare la energia cinetică a rigidelor.