1. ELEMENTE DE ALGEBRĂ VECTORIALĂ

1.1. Mărimi scalare şi mărimi vectoriale

În mecanică există mărimi care pot fi caracterizate printr-un singur număr, numite *mărimi scalare*. Lungimea unui segment de dreaptă, aria unei suprafeţe, volumul unui domeniu, durata unei oscilaţii, masa unui corp se exprimă printr-un număr, acelaşi în orice sistem de coordonate. Astfel de mărimi se

Spre deosebire de acestea, există şi alte tipuri de mărimi, numite *mărimi vectoriale* ce se caracterizează prin punct de aplicaţie, suport, direcţie şi modul. De exemplu caracteristicile unei forţe, ale unei viteze, ale unei acceleraţii. Există şi alte tipuri de mărimi, numite *mărimi tensoriale*, care sunt caracterizate printr-un număr mai mare de elemente.

Un *vector* este o *entitate matematică* a cărei *imagine geometrică* este un segment de dreaptă AB, pe care s-a definit *sensul* de parcurs de la A la B (fig. 1.1).

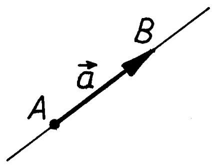

Fig. 1.1

În această lucrare simbolizarea vectorului se va face cu săgeată deasupra literei ce desemnează mărimea. În conformitate cu definiţia de mai sus, un vector $\vec{a} = \vec{AB}$ este caracterizat de următoarele elemente:

- *Punctul de aplicaţie* sau *originea* A.
- *Suportul* său, care este dreapta definită de punctele A şi B.
- *Sensul de parcurs*, de la A la B.
- *Mărimea* sau *modulul*, care este egală cu lungimea segmentului AB. Mărimea vectorului $\vec{a}$ se va nota $\left|\vec{a}\right|$ sau, simplu, a.

Există vectori care pot avea punctul de aplicaţie *oriunde* pe dreapta AB, un astfel de vector numindu-se *vector alunecător* sau *vector glisant*. Există şi cazuri de vectori care au acelaşi efect *indiferent* de poziţia în spaţiu a punctului de aplicaţie, dacă se păstrează suportul *paralel* cu o dreaptă dată, *sensul* şi *mărimea* vectorului rămânând *aceleaşi*. Astfel de vectori se numesc *vectori liberi*. De fapt în aceste cazuri e vorba despre mulţimile vectorilor cu suporturi paralele, având acelaşi sens şi aceeaşi mărime, dar la care punctele de aplicaţie diferă (pe dreapta suport la vectorii glisanţi, sau oriunde în spaţiu, la vectorii liberi). Se spune că vectorii acestor mulţimi sunt *vectori echipolenţi*.

Prin *versor* se înţelege vectorul de mărime egală cu unitatea, care defineşte direcţia şi sensul unei drepte.

1.2. Sistem de referinţă. Componentele unui vector

Spaţiul în mecanica clasică este tridimensional, absolut, independent de materie şI de timp, în care s-a definit metrica euclidiană. În unele cazuri se va reduce convenţional acest spaţiu la două dimensiuni (într-un plan), sau chir la o singură dimensiune (o dreaptă).

Fie un punct O din spaţiu în care se consideră trei drepte concurente, perpendiculare două câte două (fig. 1.2). Pe fiecare dintre cele trei drepte se alege un sens de parcurs astfel încât să se obţină un triedru de sens direct care se va numi *sistem de referinţă* sau *reper* sau *triedru de referinţă*.

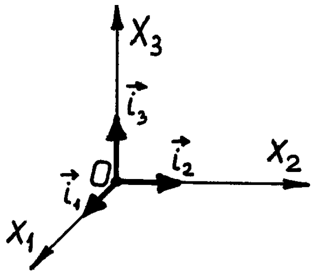

Fig. 1.2

În punctul O, pe fiecare din axele sistemului de referință se alege câte un vector, de mărime egală cu unitatea, având același sens de parcurs cu axa respectivă. Vectorii astfel definiți sunt versorii celor trei axe şi se notează $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$. Orice vector raportat la reperul $Ox_1x_2x_3$ se poate exprima în funcție de versorii $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$. Astfel, fără a micşora generalitatea, se consideră că originea vectorului $\vec{a}$ coincide cu punctul O. Proiecțiile vârfului vectorului $\vec{a}$ pe cele trei axe se consideră că au coordonatele a_1, a_2 şi a_3; aceste trei numere se numesc *componentele* vectorului $\vec{a}$ în sistemul $Ox_1x_2x_3$.

În acest caz vectorul $\vec{a}$ se poate scrie sub forma:

$$\vec{a} = a_1\,\vec{i}_1 + a_2\,\vec{i}_2 + a_3\,\vec{i}_3 \tag{1.1}$$

Pentru uşurința scrierii se preferă o tratare matriceală a teoriei vectorilor. Astfel, relația (1.1) se poate scrie sub forma:

$$\vec{a} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{a\} \tag{1.2}$$

unde:

$$\{a\} = \{a_1; a_2; a_3\}^t$$

$$\left\{\vec{i}\right\} = \left\{\vec{i}_1; \vec{i}_2; \vec{i}_3\right\}^t \tag{1.3}$$

În acest fel vectorului $\vec{a}$ i se asociază matricea coloană $\{a\}$, formată din componentele a_1, a_2, a_3, iar bazei de versori $\vec{i}_1$, $\vec{i}_2$, $\vec{i}_3$ i se asociază matricea coloană $\left\{\vec{i}\right\}$.

Vectorului $\vec{a}$ i se va mai asociază şi o matrice asimetrică, notată $[a]$, astfel:

$$[a] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Formal, conform relației (1.2), vectorul $\vec{a}$ se scrie ca produs de două matrici prima fiind scrisă sub formă transpusă. Prin generalizare, la diferitele tipuri de produse dintre doi vectori, care se vor defini ulterior, dacă se foloseşte scierea matriceală, primul vector se scrie sub formă transpusă.

Geometric, se arată elementar că modulul vectorului $\vec{a}$ se calculează cu relația:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{1.5}$$

Relația (1.5) se poate scrie şi funcție de matricea coloană $\{a\}$ sub forma:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\{a\}^t \cdot \{a\}} \tag{1.6}$$

Trebuie precizat că matricea $\{a\}$ defineşte complet vectorul $\vec{a}$ dacă acesta este liber. Dacă $\vec{a}$ este vector *legat* trebuie cunoscut şi *punctul de aplicație* deci încă trei parametri scalari, iar dacă este vector alunecător trebuie cunoscuți încă doi parametri ce definesc dreapta suport.

1.3. Operații cu vectori

Noțiunile anterior introduse conduc automat la unele operații cu vectori, cum sunt adunarea vectorilor şi înmulțirea cu un scalar. Este necesară definirea acestor operații pentru vectori lliberi, în aplicații folosindu-se legarea vectorilor de punctele de care se ataşează prin însăşI semnificația lor.

1. *Vectorul nul*, este vectorul $\vec{e}$ pentru care $\{e\} = \{0;0;0\}^t$. Geometric, în acest caz, extremitățile vectorului coincid. Cu ajutorul relației (1.5) se verifică imediat că modulul vectorului nul este zero.

2. *Egalitatea a doi vectori liberi.* Doi vectori liberi $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt egali dacă $\{a\} = \{b\}$.

3. *Adunarea vectorilor liberi*. Suma vectorilor liberi $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{a\} + \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{b\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \left(\{a\} + \{b\}\right) \tag{1.7}$$

Adunarea vectorilor liberi este asociativă şi comutativă. Grafic, adunarea vectorilor se face cu regula paralelogramului (fig. 1.3).

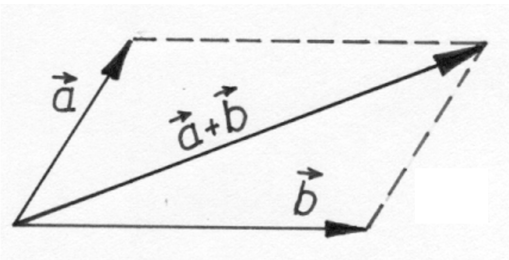

Fig. 1.3

Adunarea vectorilor are următoarele proprietăți:

- Asociativitatea $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{c} + \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$;
- Comutativitatea $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- $\vec{a} + \vec{e} = \vec{e} + \vec{a} = \vec{a}$, unde $\vec{e}$ este vectorul nul;
- Pentru oricare vector $\vec{a}$, cu matricea coloană ataşată $\{a\}$ există un vector $-\vec{a}$, cu matricea coloană ataşată $-\{a\}$, astfel încât $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \left(-\vec{a}\right) + \vec{a} = \vec{e}$.

Aceste proprietăți demonstrează că mulțimea vectorilor liberi, împreună cu operația de adunare formează un grup abelian.

4. *Înmulțirea unui vector cu un scalar*. Fie scalarul m. Vectorul liber $m\vec{a}$ se calculează cu relația:

$$m\vec{a} = m\left(\left\{\vec{i}\right\}^t \{a\}\right) = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \left(m\{a\}\right) \tag{1.8}$$

Sunt evidente proprietățile:

- $m\cdot\left(n\,\vec{a}\right)=n\left(m\,\vec{a}\right)=m\cdot n\cdot\vec{a}$
- $m\,\vec{a}+n\,\vec{a}=(m+n)\,\vec{a}$
- $m\,\vec{a}+m\,\vec{b}=m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$
- $m\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot m$
- $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (1.9)

m şi n fiind scalari oarecare.

Proprietățile susamintite indică faptul că mulțimea vectorilor liberi formează un spațiu vectorial peste corpul numerelor reale.

5. *Produsul scalar al vectorilor (Produsul interior).*

Produsul scalar al vectorilor liberi $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este un *număr* care este *definit* prin:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) \tag{1.10}$$

unde $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ este cosinusul unghiului făcut de dreptele suport ale celor doi vectori, $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

Sunt uşor de arătat proprietățile:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$
- $\left(m\,\vec{a}\right)\cdot\left(n\,\vec{b}\right)=m\cdot n\cdot\vec{a}\cdot\vec{b};\;\; m;n\in R$ (1.11)
- $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, dacă $\left|\vec{a}\right|=0$ sau $\left|\vec{b}\right|=0$ sau dacă cei doi vectori sunt *perpendiculari*;
- Produsul scalar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ poate fi un număr pozitiv sau negativ, după cum unghiul dintre cei doi vectori este mai mic sau mai mare decât $\frac{\pi}{2}$;
- $\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot pr_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)$,în care $pr_{\vec{a}}\left(\vec{b}\right)$ este proiecția ortogonală a vectorului $\vec{b}$ pe dreapta definită de vectorul $\vec{a}$;
- dacă vectorii $\vec{b}$ şi $\vec{a}$ sunt paraleli, atunci produsul interior se comportă ca un produs obişnuit între scalari, deci poate fi considerat ca o generalizare a produsului din algebra scalarilor.

În funcție de componentele vectorilor, ținând cont de generalizarea de la paragraful 1.2., produsul scalar se calculează astfel:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\left\{\vec{i}\right\}^t\{a\}\right)^t\cdot\left(\left\{\vec{i}\right\}^t\{b\}\right)=\{a\}^t\left\{\vec{i}\right\}\cdot\left\{\vec{i}\right\}^t\{b\} \tag{1.12}$$

Deoarece, conform definiției (1.10), $\vec{i_1}\cdot\vec{i_2}=\vec{i_1}\cdot\vec{i_3}=\vec{i_2}\cdot\vec{i_3}=0$ şi $\vec{i_1}\cdot\vec{i_1}=\vec{i_2}\cdot\vec{i_2}=\vec{i_3}\cdot\vec{i_3}=1$, se poate scrie:

$$\left\{\vec{i}\right\}\cdot\left\{\vec{i}\right\}^t=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=[I] \tag{1.13}$$

Înlocuind (1.13) în (1.12) se obține expresia produsului scalar:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\{a\}^t[I]\{b\}=\{a\}^t\{b\}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{1.14}$$

Cu ajutorul definiției (1.10) se poate calcula unghiul dintre doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$:

$$\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{\{a\}^t\{b\}}{\sqrt{\{a\}^t\{a\}}\cdot\sqrt{\{b\}^t\{b\}}} \tag{1.15}$$

6. *Produsul vectorial (Produsul exterior) a doi vectori.*

Pentru definirea produsului vectorial se consideră că vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ au aceeaşi origine (dacă sunt vectori liberi originea poate fi aleasă oriunde). Prin *definiție* produsul vectorial al vectorului $\vec{a}$ cu vectorul $\vec{b}$ este un *vector* notat $\vec{a}\times\vec{b}$ care este *perpendicular* pe *planul* determinat de vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, cu sensul dat de *regula şurubului drept* la rotirea de la $\vec{a}$ la $\vec{b}$ (fig. 1.4), şi mărimea dată de:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right) \tag{1.16}$$

unde $\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ e sinusul unghiului făcut de dreptele suport ale vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.

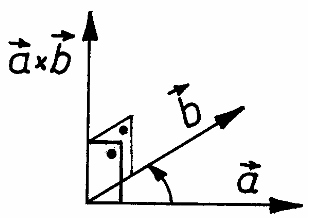

Fig. 1.4

Din definiția de mai sus rezultă imediat proprietățile:

- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (*anticomutativitatea* produsului vectorial)
- $\left(m\vec{a}\right)\times\left(n\vec{b}\right)=m\cdot n\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$; $m;n\in R$
- $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (1.17)
- $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

- $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ dacă $\left|\vec{a}\right| = 0$ sau $\left|\vec{b}\right| = 0$ sau dacă vectorii sunt *paraleli*.

Valoarea absolută a produsului vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ este egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori sau dublul ariei triunghiului constuit cu cei doi vectori.

În funcție de componentele vectorilor, ținând cont de generalizarea de la 1.2, produsul vectorial se calculează astfel:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\left\{\vec{i}\right\}^t\{a\}\right)^t \times \left(\left\{\vec{i}\right\}^t\{b\}\right) = \{a\}^t\left\{\vec{i}\right\}\times\left\{\vec{i}\right\}^t\{b\} \tag{1.18}$$

Deoarece, conform definiției produsului vectorial, $\vec{i_1}\times\vec{i_1} = \vec{i_2}\times\vec{i_2} = \vec{i_3}\times\vec{i_3} = \vec{0}$, $\vec{i_1}\times\vec{i_2} = \vec{i_3}$, $\vec{i_1}\times\vec{i_3} = -\vec{i_2}$, $\vec{i_2}\times\vec{i_1} = -\vec{i_3}$, $\vec{i_2}\times\vec{i_3} = \vec{i_1}$, $\vec{i_3}\times\vec{i_1} = \vec{i_2}$, $\vec{i_3}\times\vec{i_2} = -\vec{i_1}$, se poate scrie:

$$\left\{\vec{i}\right\}\times\left\{\vec{i}\right\}^t = \begin{bmatrix} \vec{0} & \vec{i_3} & -\vec{i_2} \\ -\vec{i_3} & \vec{0} & \vec{i_1} \\ \vec{i_2} & -\vec{i_1} & \vec{0} \end{bmatrix} = \left[\vec{I}\right] \tag{1.19}$$

Înlocuind (1.19) în (1.18) se obține expresia produsului vectorial:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \{a\}^t\cdot\left[\vec{I}\right]\cdot\{b\} \tag{1.20}$$

Prin calcul direct, folosind matricele antisimetrice, ataşate vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, date de (1.4), se poate arăta că relația (1.20) capătă forma:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \{a\}^t\left[\vec{I}\right]\{b\} = \left\{\vec{i}\right\}^t[a]\{b\} = -\left\{\vec{i}\right\}^t[b]\{a\} \tag{1.21}$$

Pentru calculul produsului vectorial, în locul relației (1.21), se poate folosi relația:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{i_2} & \vec{i_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

7. *Produsul mixt.* Fie vectorii liberi $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$, presupuşi aplicați în punctul O. Produsul mixt al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ notat ($\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$) este prin *definiție*, un *număr* dat de:

$$\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \tag{1.23}$$

Cu relațiile (1.14) şi (1.21) produsul mixt se calculează astfel:

$$\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right) = \{a\}^t[b]\{c\} \tag{1.24}$$

Dezvoltarea relației (1.24) arată că:

$$\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \tag{1.25}$$

Produsul mixt are următoarele proprietăți:

- produsul mixt este permutabil:

$$\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right)=\left(\vec{c}\,;\vec{a}\,;\vec{b}\right)=\left(\vec{b}\,;\vec{c}\,;\vec{a}\right) \tag{1.26}$$

- dacă cel puțin *doi* dintre vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sunt *paraleli* atunci:

$$\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right)=0$$

- dacă $\vec{a}\neq\vec{0}$; $\vec{b}\neq\vec{0}$; $\vec{c}\neq\vec{0}$ și nu sunt paraleli atunci din $\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right)=0$ rezultă că vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sunt *coplanari*;
- $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}$;
- $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$;
- $\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}$;
- Din punct de vedere geometric, produsul mixt a trei vectori, este egal cu volumul paralelipipedului construit pe acești vectori, sau este egal cu de 6 ori volumul tetraedrului construit cu cei trei vectori ca muchii.

8. *Dublul produs vectorial* al vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ este un *vector* dat de:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left\{\vec{i}\right\}^{t}[a][b]\{c\} \tag{1.27}$$

Se poate arăta că:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) \tag{1.28}$$

Relația (1.28) arată că produsul vectorial nu este asociativ, dar cu ajutorul ei se obține identitatea:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{0} \tag{1.29}$$

1.4. Modificarea componentelor unui vector la schimbarea sistemului de referință

Un vector liber $\vec{a}$ poate fi determinat prin proiecțiile sale față de un sistem de referință ales. Aceste proiecții sunt trei mărimi ce se modifică la schimbarea reperului, după reguli ce se vor prezenta în cele ce urmează.

Se consideră un vector $\vec{a}$ care față de un sistem de referință cu baza de versori $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ are matricea atașată $\{a\} = \{a_1; a_2; a_3\}^t$. Se pune problema găsirii componentelor vectorului $\vec{a}$ față de un alt sistem de referință care are baza de versori $\vec{i}_1^{\,'}, \vec{i}_2^{\,'}, \vec{i}_3^{\,'}$. Pentru aceasta trebuie cunoscute relațiile între bazele de versori precizate:

$$\begin{aligned}
\vec{i}_1^{\,'} &= S_{11}\,\vec{i}_1 + S_{12}\,\vec{i}_2 + S_{13}\,\vec{i}_3 \\
\vec{i}_2^{\,'} &= S_{21}\,\vec{i}_1 + S_{22}\,\vec{i}_2 + S_{23}\,\vec{i}_3 \\
\vec{i}_3^{\,'} &= S_{31}\,\vec{i}_1 + S_{32}\,\vec{i}_2 + S_{33}\,\vec{i}_3
\end{aligned} \tag{1.38}$$

care se pot pune sub formă matriceală:

$$\left\{\vec{i}^{\,'}\right\} = [S]\left\{\vec{i}\right\} \tag{1.39}$$

în care $\left\{\vec{i}^{\,'}\right\}$ și $\left\{\vec{i}\right\}$ sunt matricele atașate celor două baze de versori, iar $[S]$ este matricea de schimbare de bază de la primul la al doilea sistem de referință.

Observație: dacă cele două sisteme de referință au axele ortogonale două câte două, cu (1.13) se poate scrie:

$$[I] = \left\{\vec{i}^{\,'}\right\}\left\{\vec{i}^{\,'}\right\}^t = [S]\left\{\vec{i}\right\}\cdot\left\{\vec{i}\right\}^t [S]^t = [S][I][S]^t = [S][S]^t$$

În consecință:

$$[S]\cdot[S]^t = [I] \tag{1.40}$$

Prin urmare inversa matricei $[S]$ coincide cu transpusa sa:

$$[S]^{-1} = [S]^t \tag{1.41}$$

Vectorul $\vec{a}$ se poate scrie:

$$\vec{a} = \left\{\vec{i}\right\}^t\{a\} = \left\{\vec{i}^{\,'}\right\}^t [S]\{a\} = \left\{\vec{i}^{\,'}\right\}^t \left\{a^{'}\right\}$$

$\left\{a^{'}\right\}$ este matricea coloană atașată vectorului $\vec{a}$ față de noul sistem de referință. Se observă că:

$$\left\{a^{'}\right\} = [S]\{a\} \tag{1.42}$$

Aceasta este relația care face legătura între componentele vectorului $\vec{a}$ față de cele două sisteme de referință.

Cu ajutorul relației anterioare, se poate scrie:

$$\left\{a^{'}\right\}^t\left\{a^{'}\right\} = \{a\}^t[S]^t[S]\{a\} = \{a\}^t[I]\{a\} = \{a\}^t\{a\} \tag{1.43}$$

De unde rezultă că modulul vectorului nu se modifică la schimbarea sistemului de referință.

Dacă (1.42) reflectă modul în care se schimbă matricea coloană ataşată vectorului $\vec{a}$ la schimbarea sistemului de referinţă, este necesară determinarea unei relaţi care să prezinte modificarea matricei antisimetrice. Pentru aceasta se consideră produsul vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ calculat în cele două sisteme de referinţă, şi folosind (1.39) şi (1.42):

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left\{\vec{i}\right\}^t [a]\{b\} = \left\{\vec{i}\,'\right\}^t [S][a][S]^t\{b'\} \tag{1.44}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left\{\vec{i}\,'\right\}^t [a']\cdot\{b'\} \tag{1.45}$$

Deoarece este acelaşi vector rezultă:

$$[a'] = [S][a][S]^t \tag{1.46}$$

Observaţie: Această ultimă relaţia (1.46) coincide cu relaţia de schimbare a matricii ataşate unui tensor de ordinul doi la modificarea sistemului de referinţă.

1.5. Orientarea relativă a sistemelor de referinţă

Fie sistemele de referinţă carteziene: $P\left(Ox_1'x_2'x_3'\right)$, numit sistem de referiţă *propriu*, cu baza de versori $\left[\vec{i}_1\,',\vec{i}_2\,',\vec{i}_3\,'\right]$, şi $E\left(Ox_1x_2x_3\right)$, numit sistem de referiţă *exterior*, cu baza de versori $\left[\vec{i}_1,\vec{i}_2,\vec{i}_3\right]$. Admitem, ceea ce este totdeauna posibil, că la începutul oricărei deplasări geometrice relative a reperelor P şi E există relaţia: $\vec{i}_1\,'=\vec{i}_1$, $\vec{i}_2\,'=\vec{i}_2$, $\vec{i}_3\,'=\vec{i}_3$, axele celor două sisteme fiind, deci, paralele şi la fel orientate, situaţie geometrică pe care o vom nota prin PAP (paralelism a priori).

1.5.1. Rotaţia

Fie axa Δ, de versor $\vec{u}$, solidară cu E şi fie $\left(\vec{u},\Phi\right)$ o rotaţie de unghi Φ a lui P în jurul lui Δ. Se acceptă situaţia PAP. Fie $\vec{v}$ un vector solidar cu P, în situaţia de la începutul rotaţiei, şi fie $\vec{w}$ vectorul în care trece $\vec{v}$ după consumarea rotaţiei $\left(\vec{u},\Phi\right)$. Există corelaţia:

$$\vec{w} = \vec{v}\cos\Phi - \vec{v}\times\vec{u}\sin\Phi + <\vec{v}\ \vec{u}>\vec{u}(1-\cos\Phi)\,. \tag{1.47}$$

Demonstraţie: Fie $\left[\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]$ o bază de versori ortogonală solidară cu $P\cdot\left(\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{u}\right)$. După rotaţia $\left(\vec{u},\Phi\right)$ aceasta trece în $\left[\vec{e}_1\,',\vec{e}_2\,',\vec{e}_3\,'\right]$, cu:

$$\vec{e}_1\,' = \vec{e}_1\cos\Phi + \vec{e}_2\sin\Phi\,;\quad \vec{e}_2\,' = -\vec{e}_1\sin\Phi + \vec{e}_2\cos\Phi\,;\quad \vec{e}_3\,' = \vec{u}\,.$$

Fie: $\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{u}$; $\vec{w} = \lambda_1\vec{e}_1\,' + \lambda_2\vec{e}_2\,' + \lambda_3\vec{u}$.

Evident că: $\vec{w} = \left(\lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2\right)\cos\Phi + \left(\lambda_1 \vec{e}_2 - \lambda_2 \vec{e}_1\right)\sin\Phi + \lambda_3 \vec{u}$,

care cu: $\vec{v} \times \vec{u} = -\lambda_1 \vec{e}_2 + \lambda_2 \vec{e}_1 + -\lambda_3 =< \vec{v}\ \vec{u} >$ duce la (1.47).

Fie $[S]$ $\left(S_{ij},\ i, j = 1,2,3\right)$ matricea ortogonală proprie de schimbare de bază de la E la P:

$$\left\{\vec{i}'\right\} = [S]\left\{\vec{i}\right\}. \tag{1.48}$$

Evident, $[S] = [I]$ în situația PAP. După consumarea rotației $\left(\vec{u}, \Phi\right)$ elementele matricei $[S]$ sunt:

$$S_{ij} = \delta_{ij}\cos\Phi - \left(\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_k\right)\sin\Phi + u_i u_j (1 - \cos\Phi), \tag{1.49}$$

unde: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i = j; \\ 0; & i \neq j; \end{cases}$ este simbolul Kronecker;

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{dac[(i,j,k) este o permutare para;} \\ -1; & \text{dac[(i,j,k) este o permutare impara;} \\ 0; & \text{dac[doi indici sunt egali;} \end{cases}$$

sunt simbolurile Ricci; $\vec{u} = \sum_{k=1}^{3} u_k \vec{i}_k$.

Relația (1.49) se obține punând în (1.47): $\vec{v} = \vec{i}_j$, $\vec{w} = \vec{i}_j'$ și ținând cont că $\left(\vec{i}_i, \vec{i}_j, \vec{u}\right) = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} u_k$. Concret:

$$\begin{aligned} &S_{11} = \cos\Phi + u_1^2 (1 - \cos\Phi);\ S_{21} = u_1 u_2 (1 - \cos\Phi) - u_3 \sin\Phi; \\ &S_{31} = u_1 u_3 (1 - \cos\Phi) + u_2 \sin\Phi; \\ &S_{12} = u_1 u_2 (1 - \cos\Phi) + u_3 \sin\Phi;\ S_{22} = \cos\Phi + u_2^2 (1 - \cos\Phi); \\ &S_{32} = u_2 u_3 (1 - \cos\Phi) - u_1 \sin\Phi; \\ &S_{13} = u_1 u_3 (1 - \cos\Phi) - u_2 \sin\Phi;\ S_{23} = u_2 u_3 (1 - \cos\Phi) + u_1 \sin\Phi; \\ &S_{33} = \cos\Phi + u_3^2 (1 - \cos\Phi). \end{aligned} \tag{1.50}$$

Apar două probleme tip:

Problema 1. Se dă: rotația $\left(\vec{u}, \Phi\right)$, adică: $\vec{u} = u_1 \vec{i}_1 + u_2 \vec{i}_2 + u_3 \vec{i}_3$ și Φ, reperele P și E fiind inițial în situația PAP.

Se cere: matricea $[S]$.

Elementele matricii $[S]$ se determină cu relațiile (1.50).

Problema 2. Se dă: matricea de rotație $[S]$.

Se cere: axa de rotație $\Delta\left(\vec{u}\right)$ și unghiul de rotație Φ.

Dintre cele 9 mărimi S_{ij}, numai 3 sunt distincte, datorită ortogonalității matricei $[S]$. Considerând și relația $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$ se obțin 4 ecuații cu necunoscutele u_1, u_2, u_3, Φ. Din (1.50) se obține:

$$\cos\Phi = \frac{1}{2}(S_{11} + S_{22} + S_{33}); \quad u_1 = \frac{S_{23} - S_{32}}{2\sin\Phi};$$

$$u_2 = \frac{S_{31} - S_{13}}{2\sin\Phi}; \qquad u_3 = \frac{S_{12} - S_{21}}{2\sin\Phi}. \tag{1.51}$$

În aplicații, este uneori util, să se exprime elementele matricei $[S]$ în funcție de alți parametri.

1.5.3. Rotații succesive

Fie reperele carteziene P și E, condiția PAP fiind îndeplinită.

Fie șirul de rotații succesive ale reperului P:

Rotația R_1, cu unghiul Φ_1, în jurul axei Δ_1, de versor $\vec{u}^1 = u_1^1 \vec{i}_1^0 + \; + u_2^1 \vec{i}_2^0 + u_3^1 \vec{i}_3^0$, unde $\vec{i}_k^0 = \vec{I}_k$. Fie $\left[\vec{i}_1^1, \vec{i}_2^1, \vec{i}_3^1\right]$ baza asociată lui P, la finele rotației $\left(\vec{u}_1^1, \Phi_1\right)$. Matricea de schimbare de bază $[S_{10}]$ se determină cu (1.50), având:

$$\left\{\vec{i}_1^1 \,|\, \vec{i}_2^1 \,|\, \vec{i}_3^1\right\}^T = [S]\left\{\vec{i}_1^0 \,|\, \vec{i}_2^0 \,|\, \vec{i}_3^0\right\}^T. \tag{1.52}$$

Rotația R_2, cu unghiul Φ_2, în jurul axei Δ_2, de versor $\vec{u}^2 = u_{10}^2 \vec{i}_1 + \; + u_{20}^2 \vec{i}_2 + u_{30}^2 \vec{i}_3$.
Componentele u_k^2 ale lui $\vec{u}^2$ în baza $\left[\vec{i}_1^1, \vec{i}_2^1, \vec{i}_3^1\right]$ se obțin din relația:

$$\left\{u_1^2, u_2^2, u_3^2\right\}^T = [S_{10}]\left\{u_{10}^2, u_{20}^2, u_{30}^2\right\}^T.$$

Fie $\left[\vec{i}_1^2, \vec{i}_2^2, \vec{i}_3^2\right]$ baza asociată lui P la finele rotației $\left(\vec{u}^2, \Phi_2\right)$ și fie $[S_{21}]$ matricea de schimbare de bază asociată rotației R_2. Se poate scrie:

$$\left\{\vec{i}_1^2 \,|\, \vec{i}_2^2 \,|\, \vec{i}_3^2\right\}^T = [S_{21}]\left\{\vec{i}_1^1 \,|\, \vec{i}_2^1 \,|\, \vec{i}_3^1\right\}^T, \text{ adică}$$

$$\left\{\vec{i}_1^2 \,|\, \vec{i}_2^2 \,|\, \vec{i}_3^2\right\}^T = [S_{21}][S_{10}]\left\{\vec{i}_1^0 \,|\, \vec{i}_2^0 \,|\, \vec{i}_3^0\right\}^T, \tag{1.53}$$

sau încă $$\left\{\vec{i}_1^2 \,|\, \vec{i}_2^2 \,|\, \vec{i}_3^2\right\}^T = [S_{20}]\left\{\vec{i}_1^0 \,|\, \vec{i}_2^0 \,|\, \vec{i}_3^0\right\}^T, \tag{1.54}$$

cu: $[S_{20}] = [S_{21}][S_{10}]$.

După n notații, baza $\left\{\vec{i}_1^n \,|\, \vec{i}_2^n \,|\, \vec{i}_3^n\right\}^T$ asociată lui P, la finele rotației R_n, va fi dată de:

$$\left\{\vec{i}_1^{\,n} \mid \vec{i}_2^{\,n} \mid \vec{i}_3^{\,n}\right\}^T = [S_{n0}]\left\{\vec{i}_1^{\,0} \mid \vec{i}_2^{\,0} \mid \vec{i}_3^{\,0}\right\}^T , \tag{1.55}$$

unde $[S_{n0}] = [S_{n,n-1}][S_{n-1,n-2}]\ldots[S_{21}][S_{10}]$. (1.56)

Se poate stabili elementar câte o corelație între parametrii Euler şi Rodrigues asociați unor rotații succesive. Astfel, dacă rotației R_1 i se asociază vectorul Euler $\vec{\varepsilon}_{10}$ şi ε_4^{10}, iar rotației R_2 i se asociază vectorul Euler $\vec{\varepsilon}_{21}$ şi ε_4^{21}, atunci compunerii (succesiunii) celor două rotații i se asociază:

$$\vec{\varepsilon}_{20} = \vec{\varepsilon}_{10}\,\varepsilon_4^{21} + \vec{\varepsilon}_{21}\,\varepsilon_4^{10} + \vec{\varepsilon}_{21}\times\vec{\varepsilon}_{10} ;$$

$$\varepsilon_4^{20} = \varepsilon_4^{21}\varepsilon_4^{10} - \vec{\varepsilon}_{10}\cdot\vec{\varepsilon}_{21} . \tag{1.57}$$

Fie $\vec{\rho}_{10}$ şi $\vec{\rho}_{21}$ vectorii Rodrigues asociați rotațiilor succesive R_1 şi R_2. Un vector $\vec{v}$, de componente constante în P, trece, față de E, succesiv în $\vec{v}'$ şi $\vec{v}''$. Astfel se obține elementar:

$$\vec{\rho}_{20} = \frac{\vec{\rho}_{10} + \vec{\rho}_{21} + \vec{\rho}_{21}\times\vec{\rho}_{10}}{1 - \vec{\rho}_{21}\cdot\vec{\rho}_{10}} . \tag{1.58}$$

1.6. Aplicații

Aplicația 1.1. Într-un sistem de referință $Ox_1x_2x_3$, triortogonal drept, cu baza de versori $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, se consideră vectorii:

$$\vec{a} = 2\vec{i}_1 - \vec{i}_2 + 3\vec{i}_3 = \left\{\vec{i}\right\}^t \{2;-1;3\}^t$$

$$\vec{b} = 3\vec{i}_1 + 2\vec{i}_2 = \left\{\vec{i}\right\}^t \{3;2;0\}^t$$

$$\vec{c} = \vec{i}_1 + 3\vec{i}_2 - \vec{i}_3 = \left\{\vec{i}\right\}^t \{1;3;-1\}^t .$$

Să se calculeze:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} + \vec{c}$; $\vec{b} + \vec{c}$
2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; $\vec{a}\cdot\vec{c}$; $\vec{b}\cdot\vec{c}$
3) $|\vec{a}|$; $|\vec{b}|$; $|\vec{c}|$
4) unghiurile $\left(\vec{a};\vec{b}\right)$; $\left(\vec{a};\vec{c}\right)$; $\left(\vec{b};\vec{c}\right)$
5) $\vec{a}\times\vec{b}$; $\vec{a}\times\vec{c}$; $\vec{b}\times\vec{c}$
6) produsul mixt $\left(\vec{a};\vec{b};\vec{c}\right)$

7) dublul produs vectorial $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right)$.

Rezolvare:
1) Cu relația (1.7) se obține:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left\{ \vec{i} \right\}^t \{5;1;3\}^t = 5\,\vec{i_1} + \vec{i_2} + 3\,\vec{i_3}$$

$$\vec{a} + \vec{c} = \left\{ \vec{i} \right\}^t \{3;2;2\}^t = 2\,\vec{i_1} + 2\,\vec{i_2} + 2\,\vec{i_3}$$

$$\vec{b} + \vec{c} = \left\{ \vec{i} \right\}^t \{4;5;-1\}^t = 4\,\vec{i_1} + 5\,\vec{i_2} - \vec{i_3}$$

2) Cu relația (1.14) se obține:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \{a\}^t \{b\} = \{2;-1;3\} \cdot \{3;2;0\}^t = 4$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \{a\}^t \{c\} = \{2;-1;3\} \cdot \{1;3;-1\}^t = -2$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \{b\}^t \{c\} = \{3;2;0\} \cdot \{1;3;-1\}^t = 9$$

3) Mărimile vectorilor se calculează cu relația (1.6):

$$|\vec{a}| = \sqrt{\{a\}^t \{a\}} = \sqrt{\{2;-1;3\} \cdot \{2;-1;3\}^t} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\{b\}^t \{b\}} = \sqrt{\{3;2;0\} \cdot \{3;2;0\}^t} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\{c\}^t \{c\}} = \sqrt{\{1;3;-1\} \cdot \{1;3;-1\}^t} = \sqrt{11}$$

4) Conform (1.15) rezultă:

$$\cos\left(\vec{a} ; \vec{b} \right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{182}}$$

$$\cos\left(\vec{a} ; \vec{c} \right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}} = \frac{-2}{\sqrt{154}}$$

$$\cos\left(\vec{b} ; \vec{c} \right) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{11}} = \frac{9}{\sqrt{143}}$$

5) Produsele vectoriale se calculează cu relația (1.21). Se obține:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \vec{i} \right\}^t [a]\,\{b\} = \left\{ \vec{i} \right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left\{ \vec{i} \right\}^t \cdot \{-6;9;7\}^t =$$

$$= -6\,\vec{i_1} + 9\,\vec{i_2} + 7\,\vec{i_3}$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \left\{ \vec{i} \right\}^t [a]\,\{c\} = \left\{ \vec{i} \right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix} = \left\{ \vec{i} \right\}^t \cdot \{-8;5;7\}^t =$$

$$= -8\vec{i_1} + 5\vec{i_2} + 7\vec{i_3}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \left\{\vec{i}\right\}^t [b]\{c\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{-2;3;7\}^t =$$

$$= -2\vec{i_1} + 3\vec{i_2} + 7\vec{i_3}$$

6) Cu relația (1.24):

$$\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right) = \{a\}^t [b]\{c\} = \{2;-1;3\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix} = 14$$

Produsul mixt se poate calcula şi cu relația (1.25):

$$\left(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} = 14$$

7) Dubul produs vectorial se calculează cu relația (1.27):

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \left\{\vec{i}\right\}^t [a][b]\{c\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{-16;-20;4\}^t = -16\vec{i_1} - 20\vec{i_2} + 4\vec{i_3}$$

Aplicația 1.2. Într-un sistem triortogonal, cu baza de versori $\vec{i_1}, \vec{i_2}, \vec{i_3}$, se consideră vectorii:

$$\vec{i_1}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i_2} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right\}^t$$

$$\vec{i_2}' = -\frac{1}{2}\vec{i_1} + \frac{1}{2}\vec{i_2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i_3} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^t$$

$$\vec{i_3}' = \frac{1}{2}\vec{i_1} - \frac{1}{2}\vec{i_2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i_3} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^t$$

1) să se arate că aceşti vectori formează o bază de versori ortogonală

2) să se determine matricea de schimbare de bază de la baza de versori $\vec{i_1}, \vec{i_2}, \vec{i_3}$ la baza de versori $\vec{i_1}', \vec{i_2}', \vec{i_3}'$

3) se consideră vectorul:

$$\vec{a} = 3\vec{i_1} + 2\vec{i_2} - \vec{i_3} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{3;2;-1\}^t$$

Să se scrie acest vector în baza de versori $\vec{i_1}', \vec{i_2}', \vec{i_3}'$.

Rezolvare:

1) Mărimile acestor vectori sunt:

$$\left|\vec{i}_1'\right| = \sqrt{\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right\}\cdot\left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right\}^t} = 1$$

$$\left|\vec{i}_2'\right| = \sqrt{\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\cdot\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^t} = 1$$

$$\left|\vec{i}_3'\right| = \sqrt{\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\cdot\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^t} = 1$$

deci cei trei vectori sunt versori.

Produsele scalare dintre aceştia sunt:

$$\vec{i}_1'\cdot\vec{i}_2' = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right\}\cdot\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^t = 0$$

$$\vec{i}_1'\cdot\vec{i}_3' = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right\}\cdot\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^t = 0$$

$$\vec{i}_2'\cdot\vec{i}_3' = \left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\cdot\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}^t = 0$$

deci vectorii $\vec{i}_1', \vec{i}_2', \vec{i}_3'$ sunt perpendiculari doi câte doi.

Prin urmare vectorii $\vec{i}_1', \vec{i}_2', \vec{i}_3'$ formează o bază de versori ortogonală.

2) Între cele două baze de versori se poate scrie relația:

$\left\{\vec{i}'\right\} = [S]\left\{\vec{i}\right\}$, în care matricea de schimbare de bază $[S]$ este:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Se verifică imediat că:

$$[S]\cdot[S]^t = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vectorul $\vec{a}$ se poate scrie:

$$\vec{a} = \left\{\vec{i}\right\}^t\cdot\{a\} = \left\{\vec{i}'\right\}^t[S]\{a\} = \left\{\vec{i}'\right\}^t\{a'\}$$

în care $\{a'\}$ este matricea coloană a vectorului $\vec{a}$ în baza de versori $\vec{i}_1', \vec{i}_2', \vec{i}_3'$ şi se calculează cu relația:

$$\{a'\} = [S]\{a\} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

Deci:

$$\vec{a} = \left\{ \vec{i'} \right\}^t \cdot \{a'\} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \vec{i_1}' - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \vec{i_2}' + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \vec{i_3}'.$$

Aplicația 1.3. Se consideră sistemul de coordonate curbilinii q_1, q_2, q_3, legat de coordonatele carteziene prin relațiile:

$$x_1 = q_1; \qquad x_2 = q_1^2 + q_2; \qquad x_3 = q_2^2 + q_3$$

Să se determine matricea asociată tensorului metric fundamental în coordonatele curbilinii q_1, q_2, q_3.

Rezolvare:

Vectorul de poziție $\vec{r}$ are expresia:

$$\vec{r} = q_1 \vec{i_1} + \left(q_1^2 + q_2\right)\vec{i_2} + \left(q_2^2 + q_3\right)\vec{i_3}$$

Vectorii tangenți curbelor de coordonate sunt:

$$\vec{e_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \vec{i_1} + 2q_1 \vec{i_2}; \qquad \vec{e_2} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \vec{i_2} + 2q_2 \vec{i_3}; \qquad \vec{e_3} = \vec{i_3}.$$

Componentele tensorului metric fundamental sunt:

$$g_{11} = \vec{e_1} \cdot \vec{e_1} = 1 + 4q_1^2; \quad g_{22} = \vec{e_2} \cdot \vec{e_2} = 1 + 4q_2^2; \quad g_{33} = \vec{e_3} \cdot \vec{e_3} = 1$$

$$g_{12} = \vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = 2q_1; \quad g_{13} = \vec{e_1} \cdot \vec{e_3} = 0; \quad g_{23} = \vec{e_2} \cdot \vec{e_3} = 2q_2$$

Prin urmare matricea asociată tensorului metric fundamental este:

$$[g] = \begin{bmatrix} 1+4q_1^2 & 2q_1 & 0 \\ 2q_1 & 1+4q_2^2 & 2q_2 \\ 0 & 2q_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicația 1.4. Pornind din situația PAP se roteşte reperul P succesiv în jurul axelor de versori $\vec{i_1}, \vec{i_2}, \vec{i_3}$ ale reperului E, cu unghiurile Φ_1, Φ_2, Φ_3. Se cere matricea de schimbare de bază de la reperul E la reperul P.

Rezolvare:

Matricea $[S_{E1}]$ asociată rotației $\left(\vec{I_1}, \Phi_1\right)$ se obține din (1.50) prin transpunere:

$$[S_{E1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & -s_1 & c_1 \end{bmatrix}, \text{ în care } c_1 = \cos\Phi_1;\ s_1 = \sin\Phi_1.$$

Pentru rotația $\left(\vec{I_2}, \Phi_2\right)$ se face, în prealabil, exprimarea versorului $\vec{I_2}$ al axei de rotație în baza $\left[\vec{I_1'}, \vec{I_2'}, \vec{I_3'}\right]$: $[S_{E1}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ c_1 \\ -s_1 \end{Bmatrix}$, adică: $\vec{i_2} = c_1 \vec{I_2'} - s_1 \vec{I_3'}$.

Cu: $\Phi = \Phi_2$, $u_1 = 0$, $u_2 = c_1$, $u_3 = -s_1$ se calculează cu (1.50) componentele matricei $[S_{12}]$:

$$[S_{12}] = \begin{bmatrix} c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 s_2 \\ s_1 s_2 & 1 + s_1^2(c_2 - 1) & s_1 c_1 (c_2 - 1) \\ c_1 s_2 & (c_2 - 1) & 1 + c_1^2 (c_2 - 1) \end{bmatrix}, \text{unde } c_2 = \cos\Phi_2; s_2 = \sin\Phi_2.$$

După calcule se obține: $[S_{E2}] = [S_{12}] \cdot [S_{E1}] = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ s_1 s_2 & c_1 & s_1 c_2 \\ c_1 s_2 & -s_1 & c_1 c_2 \end{bmatrix}$.

Pentru rotația $\left(\vec{I_3}, \Phi_3\right)$ se face, în prealabil, exprimarea versorului $\vec{i_3}$ al axei de rotație în baza $\left[\vec{I_1''}, \vec{I_2''}, \vec{I_3''}\right]$: $[S_{E1}] \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -s_2 \\ s_1 c_2 \\ c_1 c_2 \end{Bmatrix}$,

adică: $\vec{i_3} = -s_2 \vec{I_1''} + s_1 c_2 \vec{I_2''} + c_1 c_2 \vec{I_3''}$.

Cu: $\Phi = \Phi_3$, $u_1 = -s_2$, $u_2 = s_1 c_2$, $u_3 = c_1 c_2$ se calculează cu (1.50) componentele matricei $[S_{2P}]$:

$$[S_{2P}] = \begin{bmatrix} s_2^2 + c_2^2 c_3 & c_2[c_1 s_3 + s_1 s_2 (1 - c_3)] & -c_2[s_1 s_3 + c_1 s_2 (1 - c_3)] \\ -c_2[c_1 s_3 + s_1 s_2 (1 - c_3)] & c_3\left(1 - s_1^2 c_2^2\right) + s_1^2 c_2^2 & -s_2 s_3 + s_1 c_1 c_2^2 (1 - c_3) \\ c_2[s_1 s_3 - c_1 s_2 (1 - c_3)] & s_2 s_3 + s_1 c_1 c_2^2 (1 - c_3) & 1 - \left(s_2^2 + s_1^2 c_2^2\right)(1 - c_3) \end{bmatrix}, \text{în care: } c_3 = \cos\Phi_3;$$

$s_3 = \sin\Phi_3$.

Se obține, după calcule elementare:

$$[S] = \begin{bmatrix} c_2 c_3; & c_2 s_3; & -s_2 \\ s_1 s_2 c_3 - s_3 c_1; & s_1 s_2 s_3 + c_3 c_1; & s_1 c_2 \\ c_1 s_2 c_3 + s_3 s_1; & c_1 s_2 s_3 - c_3 s_1; & c_1 c_2 \end{bmatrix}$$