5. GEOMETRIA MASELOR

5.1. Masa. Definiții. Axiomele de masă

Masa este o mărime scalară care măsoară cantitatea de materie a unui sistem material. Din punct de vedere fizic masa se prezintă sub două aspecte: masă inerțială şi masă gravifică (gravitațională). Masa inerțială are în vedere inerția, acea proprietate a sistemelor materiale de a nu-şi modifica starea de mişcare față de un reper, numit reper inerțial, dacă nu interacționează cu alte sisteme materiale. Masa gravitațională se referă la interacțiunea gravitațională dintre sistemele materiale. Acest aspect calitativ al masei apare în forța de atracție gravitațională (sau atracție universală sau newtoniană).

Experimental s-a constatat egalitatea cantitativă a masei inerțiale şi masei gravifice.

Unitatea de măsură a masei este kilogramul (Kg).

De-a lungul istoriei mecanicii s-a constatat că masa oricărui sistem material îndeplineşte anumite proprietăți, are anumite caracteristici intrinseci, care nu pot fi demonstrate, ci acceptate ca atare. Aceste proprietăți pot fi sintetizate în următoarele axiome de masă:

- *Axioma 1.* Masa oricărui sistem material (S), notată $m(S)$, este întotdeauna pozitivă, deci:

$$M(S) \geq 0 \tag{5.1}$$

- *Axioma 2.* Dacă un sistem material (S) este format din n subsisteme materiale (S_i), disjuncte între ele, atunci masa sistemului (S) este egală cu suma maselor subsistemelor componente:

$$m(S) = \sum_{i=1}^{n} m(S_i) \tag{5.2}$$

- *Axioma 3.* Masa unui sistem material (S) este constantă în timp. Exprimarea matematică a acestei axiome este:

$$\dot{m}(S) = 0 \tag{5.3}$$

Este de precizat că această ultimă axiomă este valabilă numai pentru sistelele cu masă constantă, care nu efectuează schimburi de masă cu alte sisteme materiale. Dacă masa sistemului este variabilă (sistemul pierde sau primeşte masă) axioma 3 se exclude.

5.2. Varietăți geometrice materiale

Se consideră un sistem material (S) care ocupă un domeniu spațial (D). În funcție de dimensiunile domeniului (D) se introduc următoarele concepte mecanice, rezultate prin abstaractizare:

- *Punct material* (notat PM) este un punct geometric căruia i se asociază o masă.
- *Curbă materială* (notată CM) este o curbă geometrică în punctele căreia este repartizată masă.
- *Suprafață materială* (notată SM) este o suprafață geometrică în punctele căreia este repartizată masă.
- *Volum material* (VM) este un volum geometric în punctele căruia este distribuită masă.

Aceste concepte mecanice numite *varietăți geometrice materiale*, care reprezintă nişte idealizări, au fost introduse pentru uşurarea studiului mişcărilor mecanice.

Mărimea care caracterizează distribuția masei unui corp este *masa specifică*, întâlnită şi sub denumirea de *densitate*. Pentru fiecare tip de varietate geometrică materială se defineşte mai jos, câte un tip de masă specifică.

Pentru varietățile geometrice materiale masa se calculează în felul următor:

- pentru curba materială:

$$m = \int_{(C)} \rho(P;t)\,ds \tag{5.4}$$

în care:

- (C) este curba geometrică suport pentru curba materială;
- $\rho(P;t)$ este *masa specifică liniară*, care depinde de punctul P de pe curbă şi de timp (dacă curba este deformabilă);

- ds elementul de arc pe curba (C).

Unitatea de măsură pentru masa specifică liniară este Kg/m.

- pentru suprafața materială:

$$m = \iint_{(S)} \rho(P;t)\, d\sigma \tag{5.5}$$

în care:

- (S) este suprafața geometrică suport pentru masă;
- $d\sigma$ este elementul de arie pe suprafața (S);
- $\rho(P;t)$ este *masa specifică superficială*, care depinde de poziția pe suprafață (punctul P) și de timp (dacă suprafața este deformabilă).

Unitatea de măsură pentru masa specifică superficială este Kg/m^2.

- pentru volumul material:

$$m = \iiint_{(D)} \rho(P;t)\, d\tau \tag{5.6}$$

în care:

- (D) este volumul geometric suport pentru masă;
- $d\tau$ este elementul de volum din (D);
- $\rho(P;t)$ este *masa specifică volumică*, care depinde de poziția în domeniul (D) și de timp (dacă domeniul (D) este deformabil).

Unitatea de măsură pentru masa specifică volumică este Kg/m^3.

Dacă se raportează varietatea geometrică materială la un sistem de referință atunci poziția oricărui punct al acestuia (P) față de reperul considerat este dată prin vectorul de poziție $\vec{r}$. De aceea în relațiile anterioare, masa specifică $\rho(P;t)$ se poate scrie $\rho\left(\vec{r},t\right)$, sau mai simplu ρ.

5.3. Centrul de masă

Se consideră un sistem de puncte materiale M_i, $i=\overline{1,n}$ (notat SPM), având masele m_i ($m_i = m(M_i)$), raportat la un sistem de referință. Fie $\vec{r}_i$ vectorul de poziție al punctului M_i, $i=\overline{1,n}$, față de reperul precizat.

Centrul de masă al sistemului de puncte materiale este un punct notat C al cărui vector de poziție față de reperul considerat este dat de relația:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \tag{5.7}$$

în care:

$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, este masa sistemului de puncte materiale.

Coordonatele centrului de masă se obțin din detalierea relației anterioare Astfel, în cazul sistemului de puncte materiale, acestea sunt:

$$x_{1C} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_{1i} \cdot m_i$$

$$x_{2C} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_{2i} \cdot m_i \tag{5.8}$$

$$x_{3C}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_{3i}\cdot m_i\ ,$$

în care x_{1i}, x_{2i}, x_{3i} sunt coordonatele punctului M_i.

Proprietățile centrului de masă sunt :

Proprietatea 1. Dacă un sistem material este inclus în interiorul unei suprafețe convexe, atunci centrul de masă al sistemului se află în interiorul acelei suprafețe convexe.

Proprietatea 2. Poziția centrului de masă al unui sistem material nu depinde de sistemul de referință ales.

Proprietatea 3. Dacă sistemul material (S) este o reuniune de subsisteme (S_k) $k=\overline{1,p}$, disjuncte între ele, la care se cunoaşte poziția centrului de masă C_k prin vectorul de poziție $\vec{r}_k$ față de un reper dat, atunci centrul de masă al sistemului material (S) are vectorul de poziție:

$$\vec{r}_C=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{p} m_k\,\vec{r}_k \tag{5.9}$$

în care:

- m_k este masa subsistemului (S_k);
- $m=\sum_{k=1}^{n} m_k$ este masa sistemului (S).

În acest fel, din punct de vedere al determinării poziției centrului de masă, fiecare subsistem (S_k) se înlocuieşte cu un punct material cu aceiaşi masă ca (S_k), plasat în centrul de masă al subsistemului (S_k).

Proprietatea 4. Dacă sistemul material admite un plan, o axă sau un punct de simetrie materială (simetrie geometrică şi masică) atunci centrul de masă se găseşte în planul, pe axa sau în punctul de simetrie materială.

Proprietatea 5. Dacă toate punctele unui sistem material se găsesc pe o axă sau într-un plan atunci şi centrul de masă se găseşte pe axa sau în planul respectiv.

Aceste proprietăți pot fi folosite pentru simplificarea calculului poziției centrului de masă la corpurile cu geometrie complexă. În acest sens este util să se considere corpul ca fiind alcătuit din mai multe părți, fiecare din acestea ocupând un subdomeniu.

Se calculează, în prealabil, masele şi pozițiile centrelor de masă ale acesor subdomenii. Apoi se consideră masele subdomeniilor componente concentrate în centrele lor de masă şi se tratează sistemul material ca un sistem discret alcătuit din puncte materiale. Dacă unele din aceste subdomenii (părți componente ale corpului inițial) reprezintă goluri, atunci masele lor se iau cu semn negativ, pentru ca, suprapuse peste o parte a unui subdomeniu de masă pozitivă, să realizeze golul dorit. Considerarea unei mase ca negativă este doar o formalitate de calcul şi nu o contrazicere a primei axiome a masei.

Deasemenea, concentrarea fiecărui subdomeniu în centrul său de masă, reprezintă doar o modelare de calcul, deoarece în realitate masa este distribuită pe întreg domeniul sau subdomeniul ocupat de corp, respectiv de subcorp.

5.4 Momente de inerție

5.4.1. Definiții

Se consideră un sistem material format din:

- n puncte materiale M_i având masele m_i, $i=\overline{1,n}$;
- p curbe materiale $\left(C_k\right)$, $k=\overline{1,p}$;

- u suprafețe materiale (S_l), $l=\overline{1,u}$;

- v volume materiale (D_j), $j=\overline{1,v}$.

Se raportează sistemul material precizat la un reper T, $Ox_1x_2x_3$, care are baza de versori $\left\{\vec{i}\right\}=\left\{\vec{i_1};\ \vec{i_2};\ \vec{i_3}\right\}^t$.

Se defineşte *vectorul de inerție* al sistemului material asociat unei axe Δ, de versor $\vec{u}=\left\{\vec{i}\right\}^t\{u\}$, care trece prin originea reperului T, prin:

$$\vec{J}_{\vec{u}}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r_i}\times\left(\vec{u}\times\vec{r_i}\right)+\sum_{k=1}^{p}\int_{(C_k)}\vec{r}\times\left(\vec{u}\times\vec{r}\right)\rho\,ds+\sum_{l=1}^{u}\iint_{(S_l)}\vec{r}\times\left(\vec{u}\times\vec{r}\right)\rho\,d\sigma+$$
$$+\sum_{j=1}^{v}\iiint_{(D_j)}\vec{r}\times\left(\vec{u}\times\vec{r}\right)\rho\,d\tau \tag{5.10}$$

în care:

- $\vec{r_i}$ este vectorul de poziție, față de reperul T, al punctului M_i;

- $\vec{r}$ este vectorul de poziție, față de reperul T, al punctului curent al suprafeței materiale (C_k), $k=\overline{1,p}$, suprafeței materiale (S_l), $l=\overline{1,u}$, sau volumul material (D_j), $j=\overline{1,v}$.

Pentru diferite varietăți geometrice materiale, relația (5.10) se particularizează corespunzător. Pentru uşurința scrierii în cazul unei varietăți geometrice materiale, vectorul de inerție se va scrie:

$$\vec{J}_{\vec{u}}=\int_{VGM}\vec{r}\times\left(\vec{u}\times\vec{r}\right)\rho\,dv \tag{5.11}$$

în care $\int_{VGM}$ reprezintă, după caz, sumă în cazul sistemului de puncte materiale, integrală curbilinie pentru curba materială, integrală de suprafață pentru suprafața materială sau integrală triplă pentru volumul material.

În scriere matriceală relația (5.11) devine:

$$\vec{J}_{\vec{u}}=\left\{\vec{i}\right\}^t\int_{VGM}[r][r]^t\,\rho\,dv\cdot\{u\} \tag{5.12}$$

Se introduce matricea de inerție a varietății geometrice materiale, relativ la sistemul de referință T prin relația:

$$[J_T]=\int_{VGM}[r][r]^t\,\rho\,dv \tag{5.13}$$

Momentele de inerție relative la reperul T, se pot clasifica astfel :

a) $J_{11}=\int_{VGM}\left(x_2^2+x_3^2\right)\rho\,dv$; $J_{22}=\int_{VGM}\left(x_1^2+x_3^2\right)\rho\,dv$;

$$J_{33}=\int_{VGM}\left(x_1^2+x_2^2\right)\rho\,dv \tag{5.14}$$

Acestea se numesc *momente de inerție axiale*.

b) $J_{12} = -\int\limits_{VGM} x_1 x_2\, \rho\, dv$; $J_{13} = -\int\limits_{VGM} x_1 x_3\, \rho\, dv$; $J_{23} = -\int\limits_{VGM} x_2 x_3\, \rho\, dv$ (5.15)

Mărimile $-J_{12}$, $-J_{13}$ și $-J_{23}$ se numesc *momente de inerție centrifugale*.

Se observă că termenii $x_2^2 + x_3^2$, $x_1^2 + x_3^2$; $x_1^2 + x_2^2$, care apar la momentele de inerție axiale reprezintă pătratele distanțelor de la punctul curent al varietății geometrice materiale la axele Ox_1, Ox_2 respectiv Ox_3.

Se defineşte *momentul de inerție* al unui sistem material în raport cu planul (α) (notat J_α), cu axa (Δ) (notat J_Δ) sau punctul O (notat J_0) prin:

$$\vec{J}_{\alpha;\Delta;O} = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 + \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{(C_k)} d^2 \rho\, ds + \sum_{l=1}^{u} \iint\limits_{(S_l)} d^2 \rho\, d\sigma + \sum_{j=1}^{v} \iiint\limits_{(D_j)} d^2 \rho\, d\tau \qquad (5.16)$$

în care:

- d_i este distanța de la punctul M_i la planul (α), axa (Δ) sau polul O;

- d este distanța de la punctul curent al curbei materiale, suprafeței materiale sau volumului material la planul (α), axa (Δ) sau polul O;

J_α se numeşte *moment de inerție planar*, J_Δ se numeşte *moment de inerție axial* iar J_0 *moment de inerție polar*. Conform relației (5.16) pentru o varietate geometrică materială, față de planele de coordonate ale reperului T se pot defini următoarele momente de inerție planare:

$$J_{1O2} = \int\limits_{VGM} x_3^2\, \rho\, dv;\ J_{1O3} = \int\limits_{VGM} x_2^2\, \rho\, dv;\ J_{2O3} = \int\limits_{VGM} x_1^2\, \rho\, dv \qquad (5.17)$$

Deasemenea se poate defini momentul de inerție polar al varietății geometrice materiale în raport cu originea reperului T, prin:

$$J_O = \int\limits_{VGM} \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \rho\, dv \qquad (5.18)$$

Pentru sistemele materiale continue omogene, care au densitatea ρ constantă, se definesc *momente de inerție geometrice* (planare, axiale, polare), prin:

$$J^{(g)}_{\alpha,\Delta,O} = \frac{1}{\rho} J_{\alpha,\Delta,O} \qquad (5.19)$$

Pentru un sistem material se defineşte raza de inerție (sau de girație) în raport cu un plan (α), o axă (Δ) sau un pol O prin relația:

$$i_{\alpha,\Delta,O} = \sqrt{\frac{J_{\alpha,\Delta,O}}{m}} \qquad (5.20)$$

în care m m este masa totală a sistemului material.

Unitatea de măsură pentru momentele de inerție este "$kg \cdot m^2$ ".

5.4.2. Proprietăți

Momentele de inerție au o serie de proprietăți dintre care cele mai importante sunt:

1) Momentele de inerție planare, axiale sau polare sunt mărimi pozitive. Ele sunt nule atunci când sistemul material este conținut în planul, pe axa sau în polul respectiv.

2) Momentele de inerție centrifugale pot fi pozitive, negative sau nule, în funcție de repartiția maselor sistemului material față de axele în raport cu care se face calculul.

3) $J_O = J_{1O2} + J_{1O3} + J_{2O3}$ (5.21)

Momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție planare față de trei plane, perpendiculare două câte două, care se intersectează în polul respectiv.

4) $J_O = \frac{1}{2}\left(J_{11} + J_{22} + J_{33}\right)$ (5.22)

Momentul de inerție în raport cu un pol este egal cu semisuma momentelor de inerție axiale, față de trei axe concurente în polul respectiv şi care sunt perpendiculare între ele.

5) $J_O = J_{1O2} + J_{33} = J_{1O3} + J_{22} = J_{2O3} + J_{11}$ (5.23)

Momentul de inerție al unui sistem material față de un pol O este egal cu suma dintre momentele de inerție față de un plan (α) ce trece prin polul respectiv şi momentul de inerție față de o axă (Δ) perpendiculară pe planul (α) în punctul O.

6) $J_{11} = J_{1O2} + J_{1O3}$; $J_{22} = J_{1O2} + J_{2O3}$; $J_{33} = J_{1O3} + J_{2O3}$ (5.24)

Momentul de inerție în raport cu o axă este egală cu suma momentelor de inerție față de două plane, perpendiculare între ele, care se intersectează după axa respectivă.

7) $$J_{1O2} = \frac{1}{2}\left(J_{11} + J_{22} - J_{33}\right)$$
$$J_{1O3} = \frac{1}{2}\left(J_{11} + J_{33} - J_{22}\right) \qquad (5.25)$$
$$J_{2O3} = \frac{1}{2}\left(J_{22} + J_{33} - J_{11}\right)$$

8) $J_{11} + J_{22} \geq J_{33}$; $J_{11} + J_{33} \geq J_{22}$; $J_{22} + J_{33} \geq J_{11}$ (5.26)

9) Suma mmomentelor de inerție ale unor mase repartizate într-un plan, în raport cu două axe rectangulare din acel plan, este egală cu momentul de inerție polar în raport cu punctul de intersecție al acestor axe.

10) Dacă cel puțin una dintre axele față de care se calculează momentul de inerție centrifugal este axă de simetrie a varietății geometrice materiale atunci momentul centrigugal respectiv este nul.

Demonstrația acestor proprietăți se face elementar prin folosirea formulelor care definesc aceste momente de inerție.

Legea de variație a momentelor de inerție în raport cu axele paralele este cunoscută sub numele de *teorema lui Steiner*. Această teoremă cu referire numai la una din axele reperului T, are următorul enunț: momentul de inerție al unui sistem material față de o axă oarecare (Δ) este egal cu momentul de inerție al sistemului material față de o axă (Δ_c) paralelă cu (Δ) şi care trece prin centrul de masă al sistemului, la care se adaugă produsul dintre masa totală a sistemului şi pătratul distanței d dintre cele două axe:

$$J_\Delta = J_{\Delta_c} + md^2 \qquad (5.27)$$

5.5. Aplicații

Aplicația 5.1. Pentru placa plană omogenă din fig. 5.1. se cer:

1) Poziția centrului de masă.
2) Momentele de inerție față de axele Ox_1 şi Ox_2.

Rezolvare

1) Se împarte placa în figuri geometrice simple la care se pot calcula uşor masa şi poziția centrului de masă, astfel:
   - figura (1) – dreptunghiul ONBM
   - figura (2) – dreptunghiul MDEF
   - figura (3) – triunghiul NAB

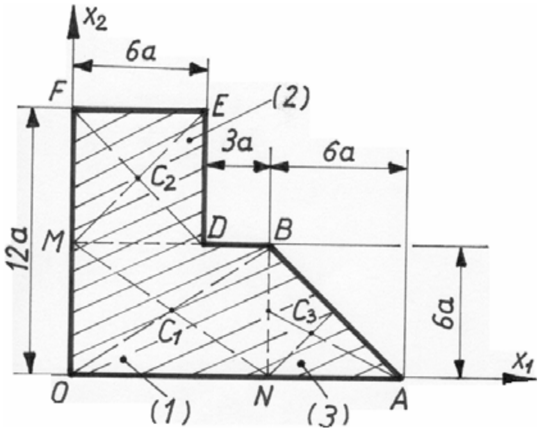

Fig. 5.1.

Pentru figura (1), masa este: $m_1 = 54a^2\rho$

Centrul de masă se găseşte la intersecţia diagonalelor. Pentru aflarea coordonatelor sale se face media aritmetică a coordonatelor pentru două vârfuri opuse, de exemplu $O(0;0;0)$ şi $B(9a;6a;0)$.

$x_{1C_1} = \frac{9a}{2}$; $x_{2C_1} = 3a$.

Pentru figura (2), masa este $m_2 = 36a^2\rho$. Centrul de masă se determină ca la figura (1), $M(0;6a;0)$; $E(6a;12a;0)$:

$x_{1C_2} = 3a$; $x_{2C_2} = 9a$.

Pentru figura (3), masa este $m_3 = 18a^2\rho$. Centrul de masă se găseşte la intersecţia medianelor. Coordonatele sale se determină ca medie aritmetică a coordonatelor vârfurilor: $N(9a;0;0)$, $A(15a;0;0)$, $B(9a;6a;0)$

$x_{1C_3} = 11a$; $x_{2C_3} = 2a$.

Coordonatele centrului de masă al plăcii se determină cu relaţiile:

$$x_{1C} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_{1C_i}}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{61}{12}a$$

$$x_{2C} = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i x_{2C_i}}{\sum_{i=1}^{3} m_i} = \frac{49}{12}a.$$

2) Pentru calculul momentelor de inerţie sunt necesare următoarele precizări, care se demonstrează elementar folosind definiţiile momentelor de inerţie:

- pentru o placă dreptunghiulară având baza b şi înălţimea h, momentul de inerţie în raport cu baza se calculează cu relaţia:

$$J_\Delta = \rho \cdot \frac{bh^3}{3}$$

iar momentul de inerţie faţă de o axă care trece prin centrul de masă al plăcii şi este paralelă cu baza se calculează cu relaţia:

$$J_{\Delta_C}=\rho\cdot\frac{bh^3}{12}$$

- pentru o placă triunghiulară care are baza b şi înălțimea h, momentul de inerție în raport cu o axă ce se suprapune cu baza este:

$$J_{\Delta}=\rho\cdot\frac{bh^3}{12}$$

iar în raport cu o axă, paralelă cu baza, care trece prin centrul de masă este:

$$J_{\Delta_C}=\rho\cdot\frac{bh^3}{36}.$$

Momentul de inerție al plăcii în raport cu axa Ox_1 este:

$$J_{11}=J_{11}^{(1)}+J_{11}^{(2)}+J_{11}^{(3)}$$

- pentru figura (1):

$$J_{11}^{(1)}=\rho\cdot\frac{9a\cdot(6a)^3}{3}=648a^4\rho;$$

- pentru figura (2) se foloseşte teorema lui Steiner:

$$J_{11}^{(2)}=\rho\cdot\frac{6a\cdot(6a)^3}{12}+36a^2\cdot\rho\cdot(9a)^2=3024a^4\rho;$$

- pentru figura (3):

$$J_{11}^{(3)}=\rho\cdot\frac{6a\cdot(6a)^3}{12}=108a^4\rho.$$

Se obține:

$$J_{11}=3780a^4\rho.$$

Momentul de inerție în raport cu axa Ox_2 este:

$$J_{22}=J_{22}^{(1)}+J_{22}^{(2)}+J_{22}^{(3)}$$

- pentru figura (1):

$$J_{22}^{(1)}=\rho\cdot\frac{6a\cdot(9a)^3}{3}=1458a^4\rho;$$

- pentru figura (2):

$$J_{22}^{(2)}=\rho\cdot\frac{6a\cdot(6a)^3}{3}=432a^4\rho;$$

- pentru figura (3) se aplică teorema lui Steiner:

$$J_{22}^{(3)}=\rho\cdot\frac{6a\cdot(6a)^3}{36}+18a^2\cdot\rho\cdot(11a)^2=2214a^4\rho.$$

Se obține:

$$J_{22}=4104a^4\rho.$$

*Aplicația 5.2***.** Pentru corpul prismatic omogen din fig. 5.2. se cer:

1) Să se determine poziția centrului de masă.
2) Matricea de inerție față de reperul T.
3) Momentul de inerție față de axa OE.

Rezolvare:

1) Masa corpului prismatic se calculează cu relația:

$$m = \iiint\limits_{(D)} \rho \, d\tau .$$

Elementul de volum este $d\tau = dx_1 x_2 x_3$. Pentru efectuarea integralei precedente trebuie stabilite limitele de integrare pentru variabile. Ecuația planului ABGE este:

$$x_3 = b - \frac{b}{a} x_1 .$$

Prin urmare limitele de integrare sunt:

$$x_1 \in [0;a];\ x_2 \in [0;c];\ x_1 \in \left[0; b - \frac{b}{a} x_1\right].$$

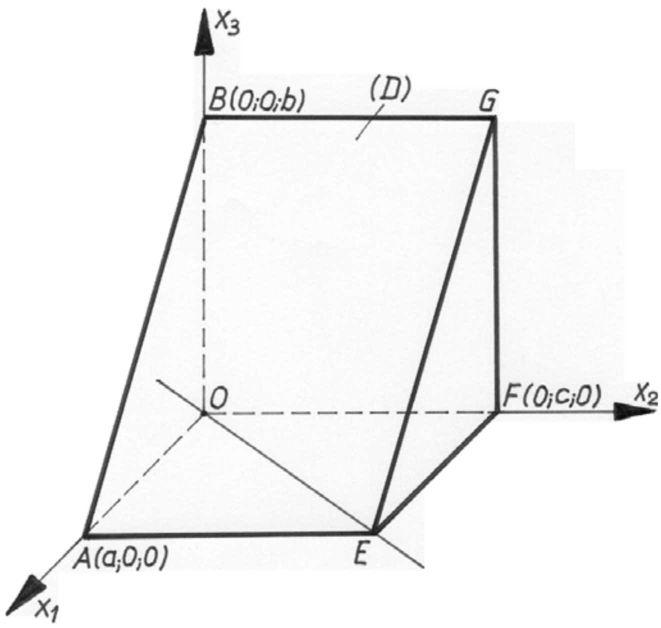

Fig. 5.2.

Deci:

$$m = \rho \int_0^c dx_2 \cdot \int_0^a \left(\int_0^{b - \frac{b}{a} x_1} dx_3 \right) dx_1 = \rho x_2 \Big|_0^c \cdot \int_0^a \left(x_3 \Big|_0^{b - \frac{b}{a} x_1} \right) dx_1 = \rho c \cdot \int_0^a \left(b - \frac{b}{a} x_1 \right) dx_1 =$$

$$= \rho c \left(b x_1 - \frac{b}{a} \frac{x_1^2}{2} \right) \Bigg|_0^a = \rho \frac{abc}{2} .$$

În mod asemănător se calculează integralele:

$$\iiint\limits_{(D)} x_1 \rho d\tau = \rho \frac{a^2 bc}{6} = \frac{ma}{3}$$

$$\iiint\limits_{(D)} x_2 \rho d\tau = \rho \frac{abc^2}{4} = \frac{mc}{2}$$

$$\iiint\limits_{(D)} x_3 \rho d\tau = \rho \frac{ab^2 c}{6} = \frac{mb}{3}$$

Coordonatele centrului de masă se obțin imediat:

$$x_{1C}=\frac{a}{3};\ x_{2C}=\frac{c}{2};\ x_{3C}=\frac{b}{3}.$$

2) Componentele matricei de inerție se calculează astfel :

$$\iiint\limits_{(D)} x_1^2\rho d\tau=\rho\frac{a^3bc}{12}=\frac{ma^2}{6};\quad \iiint\limits_{(D)} x_2^2\rho d\tau=\rho\frac{abc^3}{6}=\frac{mc^2}{3};\quad \iiint\limits_{(D)} x_3^2\rho d\tau=\rho\frac{ab^3c}{12}=\frac{mb^2}{6}$$

$$\iiint\limits_{(D)} x_1x_2\rho d\tau=\rho\frac{a^2bc^2}{12}=\frac{mac}{6};$$

$$\iiint\limits_{(D)} x_1x_3\rho d\tau=\rho\frac{a^2b^2c}{24}=\frac{mab}{12};\quad \iiint\limits_{(D)} x_2x_3\rho d\tau=\rho\frac{ab^2c^2}{12}=\frac{mbc}{6}.$$

Deci matricea de inerție va avea forma:

$$[J_T]=\begin{bmatrix} \frac{m}{6}\left(b^2+2c^2\right) & -m\frac{ac}{6} & -m\frac{ab}{12} \\ -m\frac{ac}{6} & \frac{m}{6}\left(a^2+2b^2\right) & -m\frac{bc}{6} \\ -m\frac{ab}{12} & -m\frac{bc}{6} & \frac{m}{6}\left(a^2+2c^2\right) \end{bmatrix}.$$

3) Cosinușii directori ai dreptei OE sunt: $u_1=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$; $u_2=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$; $u_3=0$.

Momentul de inerție al corpului prismatic față de axa OE se calculează cu relația (7.87):

$$J_\Delta=J_{11}u_1^2+J_{22}u_2^2+2J_{33}u_1u_2=\frac{m\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)}{6\left(a^2+c^2\right)}.$$

Aplicația 5.3. Pentru o suprafață conică circulară omogenă, de înălțime H și raza bazei R se cer poziția centrului de masă și momentul de inerție față de axa de simetrie.

Rezolvare:

Dacă se alege sistemul de referință cu originea în vârful conului și axa Ox_3 pe axa de simetrie a suprafeței conice atunci ecuația curbei care prin rotire generează suprafața conului este:

$$x_2=\frac{R}{H}x_3,\ \text{deci}\ f(x_3)=\frac{R}{H}x_3.$$

Poziția centrului de masă se determină astfel:

$$x_{3C}=\frac{\int_0^H x_3\cdot\frac{R}{H}x_3\cdot\sqrt{1+\frac{R^2}{H^2}}dx_3}{\int_0^H\frac{R}{H}x_3\cdot\sqrt{1+\frac{R^2}{H^2}}dx_3}=\frac{2}{3}H.$$

Momentul de inerție față de axa de rotație se calculează astfel :

$$J_\Delta=2\pi\rho\int_0^H\left(\frac{R}{H}x_3\right)^3\cdot\sqrt{1+\frac{R^2}{H^2}}dx_3=\frac{\pi\rho}{2}R^3\sqrt{R^2+H^2}=\frac{mR^2}{2}.$$