3. GEOMETRIA MIŞCĂRII PUNCTULUI

Cinematica studiază mişcările mecanice ale corpurilor fără a ţine seamă de aspectul material al acestora şi de acţiunile exterioare la care sunt supuse. Noţiunile fundamentale cu care operează cinematica sunt spaţiul şi timpul.

Spaţiul, aşa cum este considerat în mecanica clasică este absolut, tridimensional şi independent de materie, izotrop şi omogen, fiind înzestrat cu metrica euclidiană. Unitatea de măsură a spaţiului este metrul [m].

Timpul, considerat în mecanica clasică, este absolut, unidimensional, pozitiv, independent de materie şi ireversibil. În mecanica clasică se consideră că transmiterea acţiunilor se face instantaneu, ceea ce conferă timpului un caracter absolut. Unitatea de măsură a timpului este secunda [s].

Noţiunea de *mişcare* are un caracter complex care se referă atât la corpul care efectuează mişcarea cât şi la sistemul de referinţă în raport cu care se studiază mişcarea. Dacă reperul este presupus fix, mişcarea se numeşte absolută iar dacă reperul este mobil, mişcarea se numeşte relativă. În continuare se vor prezenta elementele de bază ale cinematicii mişcările absolute ale punctului şi solidului rigid.

3.1. Traiectoria

Se consideră un reper $Ox_1x_2x_3$ la care este raportat un punct M. Poziţia acestuia este dată prin vectorul de poziţie $\vec{OM} = \vec{r} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{r\}$. Prin *definiţie*, punctul M este *mobil* faţă de sistemul de referinţă considerat dacă vectorul său de poziţie *nu* este constant. Mişcarea punctului M este cunoscută dacă se poate preciza poziţia sa în orice moment. Acest lucru este posibil dacă este cunoscută variaţia în timp a funcţiei:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \left\{\vec{i}\right\}^t \{r(t)\}. \tag{3.1}$$

Această funcţie vectorială trebuie să fie *continuă* (discontinuităţile traiectoriei nu au sens fizic), *uniformă* (deoarece punctul M nu poate ocupa două poziţii simultan), de cel puţin *două ori derivabilă* şi finită în modul.

Din punct de vedere scalar, vectorul de poziţie $\vec{r}(t)$ poate fi descis cu ajutorul a trei funcţii. Dacă se folosesc coordonatele carteziene, definirea vectorului $\vec{r}(t)$ presupune cunoaşterea abscisei, ordonatei şi cotei punctului studiat: $x_1 = x_1(t); \quad x_2 = x_2(t); \quad x_3 = x_3(t).$

În general, dacă se foloseşte un sistem de coordonate curbilinii, definirea vectorului $\vec{r}(t)$ echivalează cu cunoaşterea următoarelor funcţii scalare: $q_1 = q_1(t); \quad q_2 = q_2(t); \quad q_3 = q_3(t).$

Uneori, numărul acestor funcţii ce definesc poziţia punctului, poate fi redus la două sau chiar una singură.

Locul geometric al poziţiilor succesive ocupate de punctul M, în mişcarea sa faţă de reperul considerat, se numeşte *traiectorie*.

Traiectoria are următoarele proprietăţi: este o curbă continuă, rectificabilă şi are în orice punct tangentă unică. Se va arăta ulterior că dacă traiectoria admite într-o poziţie două tangente distincte, atunci viteza punctului în acea poziţie, este nulă.

3.2. Parametrii cinematici ai mişcării punctului

Fie $\vec{r}(t)$ vectorul de poziţie al punctului M la momentul t şi $\vec{r}(t+\Delta t)$, vectorul de poziţie al punctului M la momentul $t+\Delta t$. Viteza medie a punctului M pe intervalul de timp $[t; t+\Delta t]$ este prin definiţie:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{3.2}$$

Acst parametru cinematic depinde atât de mărimea intervalului temporal de studiu al mişcării, câît şi de poziţiile iniţială şi finală ale punctului. Din acest motiv, viteza medie dă o imagine vagă asupra mişcării punctului fără a oferi detalii asupra evoluţiei acestuia în intervalul de observaţie al mişcării. Prin micşorarea intervalului de timp Δt aceste detalii sunt puse în evidenţă de către viteza instantanee.

Determinarea acestui parametru cinematic se face prin trecerea la limită (când $\Delta t \to 0$) în relaţia anterioară. Prin urmare viteza punctului M la momentul t este prin definiţie:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) \tag{3.3}$$

Observaţie: Se notează cu punct deasupra derivata în raport cu timpul a mărimii fizice considerate.

Unitatea de măsură a vitezei este [ms^{-1}].

Înlocuind în (3.3) forma matriceală a vectorului de poziţie se obţin componentele vitezei faţă de sistemul de referinţă:

$$\vec{v} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{v\} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\left\{\vec{i}\right\}^t \{r\}\right) = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{\dot{r}\right\}.$$

Deci matricea coloană ataşată vectorului viteză este:

$$\{v\} = \left\{\dot{r}\right\}. \tag{3.4}$$

Fie $\vec{v}(t)$ viteza punctului M la momentul t şi $\vec{v}(t+\Delta t)$ viteza punctului M la momentul $t+\Delta t$. Acceleraţia medie a punctului M pe intervalul de timp $[t; t+\Delta t]$ este prin definiţie:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \tag{3.5}$$

Pentru determinarea acceleraţiei instantanee se trece la limită (când $\Delta t \to 0$) în relaţia anterioară. Prin urmare acceleraţia instantanee a punctului M la momentul t este prin definiţie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t). \tag{3.6}$$

Unitatea de măsură a acceleraţiei este [ms^{-2}].

Înlocuind în (3.6) forma matriceală a vitezei se obţin componentele acceleraţiei faţă de un sistem de referinţă:

$$\vec{a} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{a\} = \frac{d}{dt}\left(\left\{\vec{i}\right\}^t \{v\}\right) = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{\dot{v}\right\}.$$

Deci matricea coloană ataşată vectorului acceleraţie este:

$$\{a\} = \left\{\dot{v}\right\} = \left\{\ddot{r}\right\}. \tag{3.7}$$

Se pot defini şi derivate de ordin superior ale vectorului de poziţie în raport cu timpul.

Astfel, prin derivarea expresiei acceleraţiei se obţine un vector numit *acceleraţi de ordinul al doilea*. Aceste supraaccelraţii intervin în fenomene care se desfăşoară cu o variaţie foarte rapidă a intensităţii forţei (ciocniri, cutremure).

Dacă într-un punct arbitrar P din spaţiu, se aplică un vector echivalent cu vectorul viteză, atunci când punctul M se deplasează pe traiectorie, vârful N al vectorului aplicat în P descrie o curbă Γ numită *hodograful vitezei*. Cu ajutorul holografului se poate da o interpretare fizică a accelerației punctului studiat: accelerația punctului M pe curba traiectorie este egală cu viteza extremității N pe curba hodograf.

3.3. Parametrii cinematici ai mişcării punctului în coordonate intrinseci

Fie (C) traiectoria punctului M, presupusă cunoscută (eventual traiectorie impusă). Fie M_0 poziția punctului M la momentul inițial t_0 (figura 3.1).

Se notează cu s lungimea arcului de curbă M_0M pe curba (C). Mişcarea punctului M este cunoscută dacă este precizată următoarea dependență, numită şi ecuația orară a mişcării:

$$s = s(t). \tag{3.8}$$

În acest fel vectorul de poziție poate fi reprezentat sub forma:

$$\vec{r} = \vec{r}(s). \tag{3.9}$$

Conform definiției anterioare, viteza punctului M este:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \dot{s}.$$

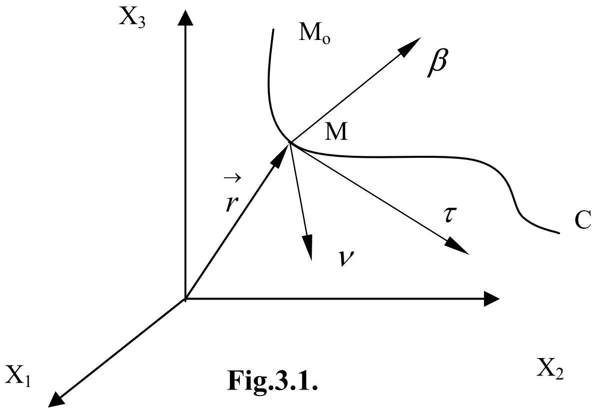

Fig.3.1.

Dar vectorul: $$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} \tag{3.10}$$

este versorul tangentei la traiectorie. Prin urmare:

$$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{\tau}. \tag{3.11}$$

Se observă că vectorul viteză este întotdeauna tangent la traiectorie.

Dacă într-un punct traiectoria admite două tangente distincte, de versori $\vec{\tau}$ şi $\vec{\tau}_1$, atunci conform relației (3.11) rezultă: $\dot{s}\,\vec{\tau} = \dot{s}\,\vec{\tau}_1$,deci $\dot{s} = 0$, deci viteza punctului este nulă.

Pentru determinarea accelerației se derivează în raport cu timpul expresia vitezei, dată de (3.11):

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{s}\,\vec{\tau} + \dot{s}\,\dot{\vec{\tau}} = \ddot{s}\,\vec{\tau} + \dot{s} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \dot{s}. \tag{3.12}$$

Pornind de la faptul că $\vec{\tau}^{\,2} = 1$, prin derivare în raport cu s se obține:

$2\vec{\tau}\cdot\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}=0$, deci vectorul $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ este perpendicular pe $\vec{\tau}$. Se notează cu $\vec{\nu}$ versorul direcției definită de vectorul $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds}$ şi cu:

$$k=\left|\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right|. \tag{3.13}$$

Dreapta de versor $\vec{\nu}$ se numeşte *normala principală*, iar k se numeşte *curbura* traiectoriei. Inversul lui k se notează cu R_C şi se numeşte *rază de curbură* a traiectoriei. Evident, cu (3.10) şi (3.13):

$$k=\frac{1}{R_C}=\sqrt{\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)^2}. \tag{3.14}$$

Înlocuind în (3.12) se obține expresia accelerației:

$$\vec{a}=\ddot{s}\,\vec{\tau}+\frac{\dot{s}^2}{R_c}\vec{\nu}. \tag{3.15}$$

În punctul M se mai introduce şi versorul $\vec{\beta}=\vec{\tau}\times\vec{\nu}$, direcția determinată de acesta numindu-se *binormală*. Versorii $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ şi $\vec{\beta}$, în această ordine, definesc un triedru normal drept, numit *triedru Frenet*. Planele definite de direcțiile precizate sunt: $\left(\vec{\tau};\vec{\nu}\right)$ - plan osculator; $\left(\vec{\tau};\vec{\beta}\right)$ - plan rectificant; $\left(\vec{\nu};\vec{\beta}\right)$ - plan normal.

Dacă viteza este întotdeauna tangentă la traiectorie, accelerația se găseşte întotdeauna în planul osculator al traiectoriei. Dacă se notează cu v modulul vitezei $\left(v=\left|\vec{v}\right|=\dot{s}\right)$, expresiile vitezei respectiv ale accelerației vor fi:

$$\vec{v}=v\cdot\vec{\tau}; \tag{3.16}$$

$$\vec{a}=\dot{v}\cdot\vec{\tau}+\frac{v^2}{R_c}\vec{\nu}. \tag{3.17}$$

Folosind scrierea matriceală:

$$\vec{v}=\left\{\vec{\tau}\right\}^t\left\{v_F\right\}; \tag{3.18}$$

$$\vec{a}=\left\{\vec{\tau}\right\}^t\left\{a_F\right\}. \tag{3.19}$$

în care: $\left\{\vec{\tau}\right\}=\left\{\vec{\tau};\vec{\nu};\vec{\beta}\right\}$ este matricea versorilor,

$\left\{v_F\right\}=\left\{\dot{s};0;0\right\}^t=\left\{v;0;0\right\}^t$ este matricea coloană asociată vitezei,

$\{a_F\} = \left\{ \ddot{s} ; \frac{\dot{s}^2}{R_c} ; 0 \right\}^t = \left\{ \dot{v} ; \frac{v^2}{R_c} ; 0 \right\}^t$ este matricea coloană asociată accelerației.

Termenul $a_\tau = \ddot{s} = \dot{v}$ se numeşte *accelerație tangențială*, iar termenul $a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{R_c} = \frac{v^2}{R_c}$ se numeşte *accelerație normală*.

Observații

1. Accelerația normală fiind permanent pozitivă este îndreptată spre centrul de curbură al traiectoriei.
2. Accelerația normală este nulă când curbura este nulă (cu excepția repausului), adică în punctele de inflexiune ale traiectoriei sau când traiectoria este dreaptă.
3. Dacă accelerația tangențială este nulă viteza este constantă şi mişcarea se numeşte uniformă.
4. Singura mişcare în care accelerația este nulă este mişcarea rectilinie şi uniformă.

Dacă se cunosc parametrii cinematici ai mişcării punctului într-un sistem de coordonate se ține cont că:

$$\vec{v} \times \vec{a} = \frac{v^3}{R_c} \vec{\beta}, \tag{3.20}$$

de unde se poate obține expresia razei de curbură:

$$R_c = \frac{v^3}{\left| \vec{v} \times \vec{a} \right|}. \tag{3.21}$$

Observație: Pentru efectuarea derivatelor în triedrul Frenet se pot folosi *formulele Frenet-Serret*:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{\Delta} \times \vec{\tau}\ ; \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = \vec{\Delta} \times \vec{\nu}\ ; \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{\Delta} \times \vec{\beta}, \tag{3.22}$$

în care:

$$\vec{\Delta} = \frac{1}{T} \vec{\tau} + \frac{1}{R_c} \vec{\beta}, \tag{3.23}$$

T fiind *raza de torsiune* a traiectoriei ce se poate calcula cu relația:

$$\frac{1}{T} = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{ds} ; \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} ; \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \right)}{\left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right|}. \tag{3.24}$$

3.4. Parametrii cinematici în coordonate curbilinii

Se consideră un sistem de coordonate curbilinii q_1, q_2, q_3 (prezentarea acestora a fost făcută la paragraful (1.8)). Vectorul de poziție va avea o expresie de tipul:

$$\vec{r} = \vec{r}\left(q_1(t); q_2(t); q_3(t)\right). \tag{3.25}$$

Este de remarcat că în aceste relații nu apare timpul explicit ci numai prin intermediul coordonatelor curbilinii.

Viteza punctului M, conform (3.3) este:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \cdot \dot{q}_i = \left\{\vec{e}\right\}^t \left\{\dot{q}\right\}, \tag{3.26}$$

în care $\left\{\vec{e}\right\} = \left\{\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3\right\}^t$ este matricea vectorilor tangenți la curbele de coordonate, iar $\left\{\dot{q}\right\} = \left\{\dot{q}_1; \dot{q}_2; \dot{q}_3\right\}^t$.

Relația între baza de vectori $\left\{\vec{e}\right\}$ şi baza de versori $\left\{\vec{u}\right\} = \left\{\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3\right\}^t$, ataşată curbelor de coordonate, se scrie sub următoarea formă matriceală:

$$\left\{\vec{e}\right\} = [G] \cdot \left\{\vec{u}\right\}, \tag{3.27}$$

în care:

$$[G] = \begin{bmatrix} \sqrt{g_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{g_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{g_{33}} \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

Înlocuind (3.27) în (3.26) se obține:

$$\vec{v} = \left\{\vec{u}\right\}^t [G]^t \cdot \left\{\dot{q}\right\} = \left\{\vec{u}\right\}^t [G] \left\{\dot{q}\right\}. \tag{3.29}$$

Matricea coloană ataşată vectorului viteză, în sistemul de coordonate curbilinii este:

$$\{v\} = [G] \left\{\dot{q}\right\}. \tag{3.30}$$

Pentru determinarea proiecțiilor ortogonale ale vectorului viteză pe axele de coordonate curbilinii se înmulțeşte $\vec{v}$, pe rând, cu versorii $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. Cele trei proiecții se pot pune într-o matrice coloană care se calculează cu:

$$\{v^*\} = \left\{\vec{u}\right\} \cdot \vec{v} = \left\{\vec{u}\right\} \cdot \left\{\vec{e}\right\}^t \left\{\dot{q}\right\} = [G]^{-1} \left\{\vec{e}\right\} \cdot \left\{\vec{e}\right\}^t \left\{\dot{q}\right\}.$$

Rezultă:

$$\{v^*\} = [G]^{-1} [g] \left\{\dot{q}\right\}. \tag{3.31}$$

Pentru a determina accelerația în coordonate curbilinii, se aplică definiția (3.6) în relația (3.26) a vitezei:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\left\{\vec{e}\right\}^t \left\{\dot{q}\right\}\right) = \frac{d}{dt}\left(\left\{\vec{e}\right\}^t\right) \cdot \left\{\dot{q}\right\} + \left\{\vec{e}\right\}^t \cdot \frac{d}{dt}\left(\left\{\dot{q}\right\}\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_j} \left\{\vec{e}\right\}^t \cdot \dot{q}_j\right) \cdot \left\{\dot{q}\right\} + \left\{\vec{e}\right\}^t \left\{\ddot{q}\right\}.$$

Se foloseşte (1.109) şi acceleraţia capătă forma:

$$\vec{a}=\left\{\vec{e}\right\}^t\left(\sum_{j=1}^{3}\dot{q}_j\left[\Gamma^{(j)}\right]\right)\left\{\dot{q}\right\}+\left\{\vec{e}\right\}^t\left\{\ddot{q}\right\}, \tag{3.32}$$

iar cu (3.27,) se obţine:

$$\vec{a}=\left\{\vec{e}\right\}^t\left(\left(\sum_{j=1}^{3}\dot{q}_j\left[\Gamma^{(j)}\right]\right)\left\{\dot{q}\right\}+\left\{\ddot{q}\right\}\right). \tag{3.33}$$

Matricea coloană ataşată vectorului acceleraţie, în sistemul de coordonate curbilinii este:

$$\{a\}=[G]\left[\left(\sum_{j=1}^{3}\dot{q}_j\left[\Gamma^{(j)}\right]\right)\left\{\dot{q}\right\}+\left\{\ddot{q}\right\}\right]. \tag{3.34}$$

Pentru determinarea proiecţiilor ortogonale ale vectorului acceleraţie pe axele de coordonate curbilinii se înmulţeşte $\vec{a}$, pe rând, cu versorii $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. Cele trei proiecţii se pot pune într-o matrice coloană care se calculează cu:

$$\{a^*\}=\left\{\vec{u}\right\}\cdot\vec{a}=[G]^{-1}\left\{\vec{e}\right\}\left\{\vec{e}\right\}^t\left(\left(\sum_{j=1}^{3}\dot{q}_j\left[\Gamma^{(j)}\right]\right)\left\{\dot{q}\right\}+\left\{\ddot{q}\right\}\right).$$

Rezultă:

$$\{a^*\}=[G]^{-1}\left(\left(\sum_{j=1}^{3}\dot{q}_j\left[\Gamma_j\right]\right)\left\{\dot{q}\right\}+[g]\left\{\ddot{q}\right\}\right). \tag{3.35}$$

Observaţie: În cazul reperelor triortogonale sunt adevărate egalităţile: $\{v^*\}=\{v\}$ şi $\{a^*\}=\{a\}$.

Detrminarea proiecţiilor acceleraţiei punctului pe axele sistemului de coordonate curbilinii se poate face utilizand un artificiu datorat matematicianului J.L. Lagrange.

Proiecţia acceleraţiei punctului pe axa de versor $\vec{u}$ este:

$$a_i=\vec{a}\,\vec{u}_i=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\vec{a}\,\vec{e}_i=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{d\vec{v}}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\quad(i=1,2,3) \tag{3.36}$$

Dar $$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{d\vec{v}}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}+\vec{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)\quad(i=1,2,3) \tag{3.37}$$

şi $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}\quad(i=1,2,3). \tag{3.38}$$

Din relaţia (3.26) rezultă:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\quad(i=1,2,3). \tag{3.39}$$

Prin înlocuirea relaţiilor (3.37), (3.38), (3.39) în (3.36), se obţine:

$$a_i=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{d\vec{v}}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)-\vec{v}\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}\right]=$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \vec{v}\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_i}\right] \quad (i = 1,2,3) \tag{3.40}$$

Se introduce funcția $T = \frac{1}{2}v^2$, (3.41)

Cu care relația (3.40) se transformă în:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right] \quad (i = 1,2,3) \tag{3.42}$$

3.5Aplicații

Aplicația 3.1. Se considerăun punct M pentru care coordonatele, fațăde un sistem de referință cartezian, au următoarea variație în timp:

$x_1 = 3b\sin t$

$x_2 = 4b\sin t$

$x_3 = 5b\cos t$, în care b este o constantăpozitivă. Se cer:

1) Viteza şi accelerația punctului M în coordonate carteziene.
2) Raza de curbură a traiectoriei.
3) Componentele vitezei şi accelerației în coordonate intrinseci.
4) Viteza şi accelerația areolară a punctului M.

Rezolvare:

1) Vectorul de poziție al punctului M fațăde sistemul de referință cartezian este:

$$\vec{r} = \left\{\vec{i}\right\}\{r\} \text{ în care } \{r\} = \begin{Bmatrix} 3b\sin t \\ 4b\sin t \\ 5b\cos t \end{Bmatrix}.$$

Viteza punctului M se calculează cu relația:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{\dot{r}\right\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{Bmatrix} 3b\cos t \\ 4b\cos t \\ -5b\sin t \end{Bmatrix}.$$

Mărimea vitezei este: $v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\{v\}^t\{v\}} = 5b$.

Accelerația punctului M se calculează cu relația:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{\dot{v}\right\} = \begin{Bmatrix} -3b\sin t \\ -4b\sin t \\ -5b\cos t \end{Bmatrix}.$$

Mărimea accelerației este: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\{a\}^t\{a\}} = 5b$.

2) Pentru calculul razei de curbură se foloseşte relația: $R_c = \dfrac{v^3}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}$

$$\vec{v}\times\vec{a}=\left\{\vec{i}\right\}^t[v]\{a\}=\left\{\vec{i}\right\}^t\begin{bmatrix}0 & 5b\sin t & 4b\cos t\\ -5b\sin t & 0 & -3b\cos t\\ -4b\cos t & 3b\cos t & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-3b\sin t\\ -4b\sin t\\ -5b\cos t\end{Bmatrix}==\left\{\vec{i}\right\}^t\begin{Bmatrix}-20b^2\\ 15b^2\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|=\sqrt{\left(-20b^2\right)^2+\left(15b^2\right)^2}=25b^2.$$

Deci: $R_c=\dfrac{(5b)^3}{25b^2}=5b$.

3) În coordonate intrinseci viteza are expresia:

$\vec{v}=\left\{\vec{\tau}\right\}\{v_F\}$, în care:

$\{v_F\}=\{v;0;0\}^t=\{5b;0;0\}^t$.

Accelerația are expresia:

$\vec{a}=\left\{\vec{\tau}\right\}^t\{a_F\}$ în care $\{a_F\}=\left\{\dot{v};\dfrac{v^2}{R_c};0\right\}^t$.

Deoarece $v=5b$ rezultă $\dot{v}=0$. Deci matricea coloană ataşată accelerației în coordonate intrinseci este:

$\{a_F\}=\{0;5b;0\}^t$.

4) Viteza areolară se calculează cu relația:

$$\vec{\Omega}=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}=\frac{1}{2}\left\{\vec{i}\right\}^t[r]\{v\}=\frac{1}{2}\left\{\vec{i}\right\}^t\begin{bmatrix}0 & -5b\cos t & 4b\sin t\\ 5b\cos t & 0 & -3b\sin t\\ -4b\sin t & 3b\sin t & 0\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{Bmatrix}3b\cos t\\ 4b\cos t\\ -5b\sin t\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\left\{\vec{i}\right\}^t\cdot\begin{Bmatrix}-20b^2\\ 15b^2\\ 0\end{Bmatrix}.$$

Mărimea accelerației areolare este:

$$\left|\vec{\Omega}\right|=\sqrt{\{\Omega\}^t\{\Omega\}}=\frac{25}{2}b^2.$$

Accelerația areolară se calculează cu relația:

$$\vec{\Gamma}=\frac{1}{2}\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)=\frac{1}{2}\left\{\vec{i}\right\}^t[r]\{a\}=\frac{1}{2}\left\{\vec{i}\right\}^t\begin{bmatrix}0 & -5b\cos t & 4b\sin t\\ 5b\cos t & 0 & -3b\sin t\\ -4b\sin t & 3b\sin t & 0\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{Bmatrix}-3b\sin t\\ -4b\sin t\\ -5b\cos t\end{Bmatrix}=\left\{\vec{i}\right\}^t\cdot\{0;0;0\}^t=0.$$

*Aplicația 3.2.*Se dă mişcarea unui punct în coordonate cilindrice: $r=2t$; $\theta=t$; $z=t^2$ în care t este timpul. Se cer:

1) Viteza şi accelerația punctului în coordonate cilindrice.
2) Viteza şi accelerația punctului în coordonate intrinseci.

Rezolvare:

1) Matricea coloană ataşată vitezei în coordonate cilindrice este:

$$\{v\}=\begin{Bmatrix}\dot{r}\\ r\dot{\theta}\\ \dot{z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\2t\\2t\end{Bmatrix}.$$

Mărimea vitezei este: $v=\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\{v\}^t\cdot\{v\}}=2\sqrt{1+2t^2}$.

Matricea coloană ataşată acceleraţiei în coordonate cilindrice este:

$$\{a\}=\begin{Bmatrix}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\\ 2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\\ \ddot{z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2t\\4\\2\end{Bmatrix}.$$

Mărimea acceleraţiei este: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\{a\}^t\cdot\{a\}}=2\sqrt{t^2+5}$.

2) Matricea coloană ataşată vitezei în coordonate intrinseci este:

$$\{v_F\}=\{v;0;0\}^t=\left\{2\sqrt{1+2t^2};0;0\right\}^t.$$

Matricea coloană ataşată acceleraţiei în coordonate intrinseci este:

$$\{a_F\}=\left\{\dot{v};\frac{v^2}{R_c};0\right\}^t.$$

Deoarece $v=2\sqrt{1+2t^2}$ rezultă: $\dot{v}=\dfrac{4t}{\sqrt{1+2t^2}}$.

Deoarece:

$$\vec{v}\times\vec{a}=\left\{\vec{u}\right\}^t[v]\{a\}=\left\{\vec{u}\right\}^t\begin{bmatrix}0&-2t&2t\\2t&0&-2\\-2t&2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}-2t\\4\\2\end{Bmatrix}=$$

$$=\left\{\vec{u}\right\}^t\begin{Bmatrix}-4t\\-4t^2-4\\4t^2+8\end{Bmatrix}, \text{ rezultă: } \left|\vec{v}\times\vec{a}\right|=4\sqrt{2t^2+7t^2+5}.$$

Raza de curbură se calculează cu relaţia: $R_c=\dfrac{v^3}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}=\dfrac{2\left(1+2t^2\right)\sqrt{1+2t^2}}{\sqrt{2t^4+7t^2+5}}$.

Prin urmare se obţine:

$$\{a_F\}=\left\{\frac{4t}{\sqrt{1+2t^2}};2\cdot\sqrt{\frac{2t^4+7t^2+5}{1+2t^2}};0\right\}^t.$$

Se verifică imediat că:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\{a_F\}^t\{a_F\}}=2\sqrt{t^2+5}$$

deci mărimea acceleraţiei este identică cu aceea determinată în cazul folosirii coordonatelor cilindrice.