4. CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

4.1. Definirea solidului rigid

Prin solid rigid se înțelege un *mediu material* pentru care *distanța dintre oricare două puncte* ale sale rămâne *neschimbată* în timp, oricare ar fi forțele aplicate acestui mediu material şi oricare ar fi mişcarea sa. Solidul rigid este o idealizare matematică.

În cazul unui solid rigid vitezele şi accelerațiile particulelor care-l compun pot varia, atât în raport cu timpul, dar şi de la o particulă la alta. De aceea se vor urmări aceşti parametri cinematici ca funcții de timp şi spațiu.

Cunoaşterea mişcării unui solid rigid este echivalentă cu obținerea expresiilor generale pentru vectorul de poziție, viteza şI accelerația unui punct oarecare al rigidului față de un sistem de referință fix.

4.2. Grade de libertate la solidul rigid

Se raportează solidul rigid la două sisteme de referință astfel:

- un sistem de referință exterior, notat E, considerat fix față de care se stabilesc parametri cinematici care definesc mişcarea solidului rigid;
- un sistem de referință propriu, notat P, legat de solidul rigid şi care se mişcă odată cu acesta. Acest reper se alege cu originea O într-un punct al solidului rigid şi axele orientate după trei axe ale acestuia, perpendiculare între ele (fig. 4.1).

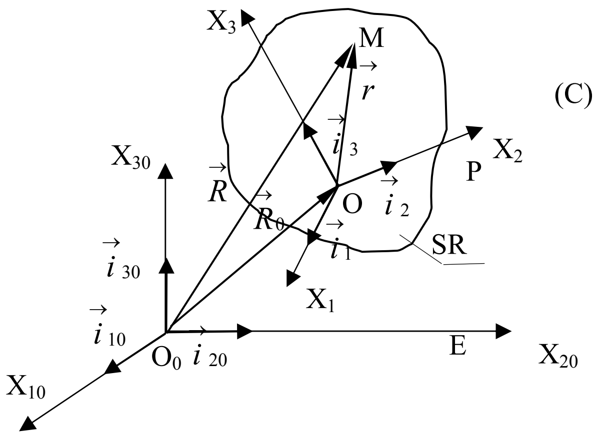


Fig. 4.1

Fie $\left\{\vec{i}\right\} = \left\{\vec{i}_1; \vec{i}_2; \vec{i}_3\right\}^t$ baza de versori ataşată reperului P şi $\left\{\vec{i}_0\right\} = \left\{\vec{i}_{10}; \vec{i}_{20}; \vec{i}_{30}\right\}^t$ baza de versori ataşată reperului E.

Orientarea reperului P este dată de matricea de schimbare de bază de la reperul E la reperul P:

$$\left\{\vec{i}\right\} = \left[{}^E S^P\right]\left\{\vec{i}_0\right\}. \tag{4.1}$$

Deoarece nu pot apare confuzii, pentru uşurința scrierii se va nota: $\left[{}^E S^P\right] = [S]$. Se va folosi scrierea cu indici superiori numai atunci când trebuie făcută distincție între mai multe matrici de schimbare de bază.

Se ştie (capitolul 1, paragraful 1.6) că matricea de schimbare de bază depinde de trei parametri, deci orientarea reperului P față de reperul E este dată de trei parametri, unghiuri, după cum se va vedea mai târziu.

Poziția unui punct M, al solidului rigid, față de reperul propriu este dată prin vectorul său de poziție:

$$\vec{r} = \left\{ \vec{i} \right\}^t \{r\} = \left\{ \vec{i} \right\}^t \{x_1; x_2; x_3\}^t . \tag{4.2}$$

Conform definiției solidului rigid, în timpul mișcării, punctul M nu își modifică poziția față de reperul P, deci matricea $\{r\}$, atașată vectorului $\vec{r}$, este constantă.

Numărul de grade de libertate la solidul rigid este egal cu numărul de parametri ce trebuie cunoscuți pentru a se determina poziția oricărui punct M al solidului rigid față de reperul exterior E. Se poate scrie:

$$\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r} \quad , \tag{4.3}$$

în care: $\vec{R}_O$ este vectorul de poziție al originii O, a reperului P, față de originea O_0, a reperului E.

$$\vec{R}_O = \left\{ \vec{i}_0 \right\}^t \{R_O\} = \left\{ \vec{i}_0 \right\}^t \{x_{10O}; x_{20O}; x_{30O}\}^t . \tag{4.4}$$

Matriceal, relația (4.3) capătă forma:

$$\vec{R} = \left\{ \vec{i}_0 \right\}^t \{R_O\} + \left\{ \vec{i}_0 \right\}^t [S]^t \{r\}. \tag{4.5}$$

Analiza relației (4.5) relevă faptul că pentru determinarea lui $\vec{R}$ trebuie cunoscute:

- mișcarea originii reperului P, față de reperul E, caracterizată prin matricea $\{R_O\}$, deci trei parametri scalari;
- orientarea reperului P, față de reperul E, caracterizată prin matricea de schimbare de bază $[S]$, deci încă trei parametri.

Prin urmare, mișcarea solidului rigid, deci a oricărui punct al său, este dată de șase parametri. În consecință solidul rigid are *șase grade de libertate*.

Dacă rigidului I se impun restricții de mișcare, numărul gradelor de libertate va fi redus corespunzător.

4.3. Matricea de schimbare de bază

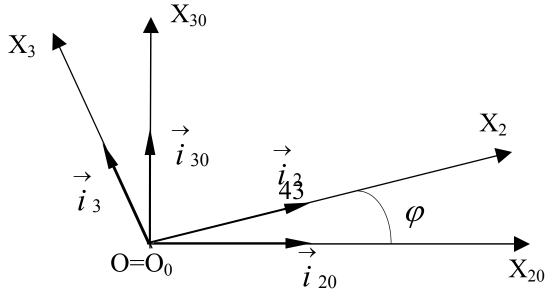
Pentru determinarea matricei de schimbare de bază, trebuie studiat modul de trecere de la reperul E la reperul P, presupuse ca având aceeași origine.

În cazurile cele mai simple această trecere se poate face printr-o simplă rotire a reperului E în jurul uneia din axele sale. Apar următoarele posibilități:

- rotire cu unghiul φ în jurul axei O_0x_{10} (fig. 4.2).

Matricea de schimbare de bază este:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$



- rotire cu unghiul φ în jurul axei $O_0 x_{20}$ (fig. 4.3).

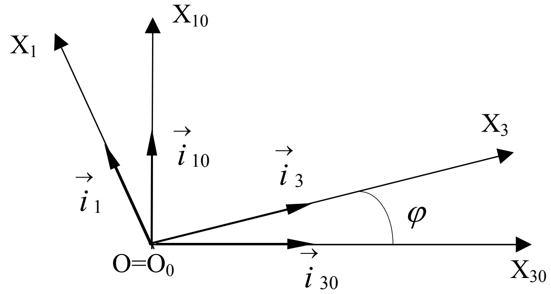


Fig. 4.3

Matricea de schimbare de bază este:

$$[S]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

- rotire cu unghiul φ în jurul axei $O_0 x_{30}$ (fig. 4.4).

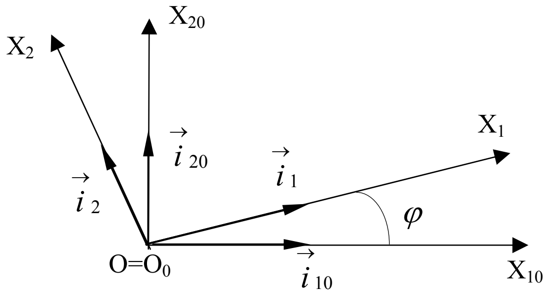


Fig. 4.4

Matricea de schimbare de bază este:

$$[S]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

În cazul general trecerea de la reperul E la reperul P se poate face prin trei rotații succesive.

Matricea de schimbare de bază de la reperul exterior la reperul propriu este:

$$[S]=\left[{}^{E}S^{P}\right]=\left[{}^{T_2}S^{P}\right]\left[{}^{T_1}S^{T_2}\right]\left[{}^{E}S^{T_1}\right].$$

Se pot face notațiile: $C_1=\cos\varphi_1$, $S_1=\sin\varphi_1$, $C_2=\cos\varphi_2$, $S_2=\sin\varphi_2$, $C_3=\cos\varphi_3$, $S_3=\sin\varphi_3$.

De menționat că trecerea de la reperul E la reperul P se poate face prin rotiri numai în jurul axelor reperului E sau numai în jurul axelor reperului P.

4.4. Unghiurile lui Euler

Din multitudinea de variante de trecere de la reperul exterior la reperul propriu, cu unghiurile corespunzătoare, cea mai des întâlnită are în vedere unghiurile lui Euler. Aceste unghiuri vor fi definite în cele ce urmează.

Se consideră reperele E şi P translatate în aceeaşi origine (fig. 4.5).

Dreapta ON, de intersecție între planele $x_{10}O_0x_{20}$ şi x_1Ox_2 se numeşte *linia nodurilor* şi are importanță în definirea unghiurilor lui Euler, care sunt:

- ψ, *unghiul de precesie*, între dreptele Ox_{10} şi ON;
- φ, *unghiul de rotație proprie*, între dreptele Ox_1 şi ON;
- θ, *unghiul de nutație*, între dreptele O_0x_{30} şi Ox_3.

Unghiurile lui Euler corespund variantei 3-1-3, cu:

$\psi=\varphi_1$; $\theta=\varphi_2$; $\varphi=\varphi_3$.

Unghiurile ψ,φ,θ se vor lua în sensul arătat în figura 4.5. Sensul pozitiv al axei ON este dat de produsul vectorial $\vec{i}_{30}\times\vec{i}_3$.

Cele trei unghiuri ale lui Euler împreună cu cele trei coordonate ale originii reperului propriu P, față de reperul fix dau cele şase grade de libertate ale solidului rigid.

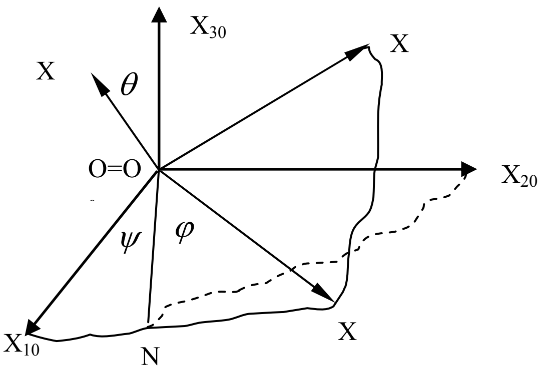


Fig.4.5

4.5. Viteza şi accelerația unghiulară a solidului rigid

Prin definiție, viteza unghiulară a solidului rigid este egală cu viteza unghiulară a reperului propriu P față de reperul exterior E. Matricea antisimetrică ataşată vectorului viteză unghiulară se determină cu relația (3.67):

$$[\omega]=[S]\begin{bmatrix}\dot{S}\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

De aici se extrag componentele vectorului viteză unghiulară $\vec{\omega}$, în proiecții pe axele reperului propriu:

$$\vec{\omega}=\left\{\vec{i}\right\}^t\{\omega\}=\left\{\vec{i}\right\}^t\{\omega_1;\omega_2;\omega_3\}^t. \tag{4.10}$$

Se dau aceste componente pentru variantele de

Componentele vitezei unghiulare în funcție de unghiurile lui Euler au forma :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi\\ \omega_2 &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi\\ \omega_3 &= \dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Pentru determinarea proiecțiilor vitezei unghiulare pe axele reperului exterior se folosește relația:

$$\vec{\omega}=\left\{\vec{i}\right\}^t\{\omega\}=\left\{\vec{i_0}\right\}^t[S]^t\{\omega\}=\left\{\vec{i_0}\right\}^t\{\Omega\}.$$

Deci matricea componentelor lui $\vec{\omega}$ față de reperul E se calculează cu:

$$\{\Omega\}=[S]^t\{\omega\}. \tag{4.12}$$

Se dau elementele matricei $\{\Omega\}$ în funcție de unghiurile lui Euler:

Accelerația unghiulară a solidului rigid se obține derivând în raport cu timpul vectorul viteză unghiulară:

$$\vec{\varepsilon}=\dot{\vec{\omega}}=\frac{d}{dt}\left(\left\{\vec{i}\right\}^t\{\omega\}\right)=\frac{d}{dt}\left(\left\{\vec{i_0}\right\}^t[S]^t\{\omega\}\right)=\left\{\vec{i_0}\right\}^t\begin{bmatrix}\dot{S}\end{bmatrix}^t\{\omega\}+\left\{\vec{i_0}\right\}^t[S]^t\left\{\dot{\omega}\right\}=$$

$$=\left\{\vec{i}\right\}^t[S]\begin{bmatrix}\dot{S}\end{bmatrix}^t\{\omega\}+\left\{\vec{i}\right\}^t\left\{\dot{\omega}\right\}=\left\{\vec{i}\right\}^t[\omega]\{\omega\}+\left\{\vec{i}\right\}^t\left\{\dot{\omega}\right\}=\vec{\omega}\times\vec{\omega}+\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}=\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}$$

Deci $\vec{\varepsilon}=\dot{\vec{\omega}}=\dfrac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}$, (4.13)

viteza unghiulară derivându-se şi în reperul propriu la fel ca în reperul fix (ca şi cum baza de versori ar fi fixă).

4.6. Distribuția de viteze şi accelerații pentru solidul rigid

Deoarece solidul rigid ocupă un domeniu spațial, viteza unui punct al său trebuie să fie o funcție de spațiu şi timp:

$$\vec{v} = \vec{v}(x_1; x_2; x_3; t). \tag{4.14}$$

Această funcție trebuie să aibă o formă care să asigure condiția de rigiditate. Pentru determinarea acestei funcții se derivează în raport cu timpul vectorul de poziție al unui punct oarecare M al solidului rigid, vector dat de relația (4.5):

$$\vec{v}_M = \dot{\vec{R}} = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left\{\dot{R}_O\right\} + \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left[\dot{S}\right]^t \{r\} + \left\{\vec{i}_0\right\}^t \{r\} + \left\{\vec{i}_0\right\}^t [S]^t \left\{\dot{r}\right\}.$$

Deoarece vectorul de poziție al punctului M față de reperul propriu atașat solidului rigid este constant, $\left\{\dot{r}\right\} = \{0\}$. Se obține:

$$\vec{v}_M = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left\{\dot{R}_O\right\} + \left\{\vec{i}\right\}^t [S]\left[\dot{S}\right]^t \{r\} = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left\{\dot{R}_O\right\} + \left\{\vec{i}\right\}^t [\omega]\{r\}.$$

Se obține relația vectorială:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{4.15}$$

unde: $\vec{v}_O$ este viteza originii O a reperului propriu;

$\vec{\omega}(t)$ este viteza unghiulară a solidului rigid;

$\vec{r} = \vec{OM}$.

Matricea coloană atașată vectorului viteză este:

$$\{v_M\} = \{v_O\} + [\omega]\{r\}. \tag{4.15.a}$$

Detaliat, relațiile anterioare, prin proiectare pe axele reperului P conduc la următoarele componente:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{01} + \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2; \\ v_2 &= v_{02} + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3; \\ v_3 &= v_{03} + \omega_1 x_2 - \omega_2 x_1; \end{aligned} \tag{4.15.b}$$

Deoarece originea reperului propriu se poate alege în orice punct al solidului rigid, relația (4.15) se poate extrapola pentru două puncte ale rigidului:

$$\vec{v}_M = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{PM} \tag{4.16}$$

Această relație se numeşte relația lui Euler şi face legătura dintre vitezele punctelor P şi M.

Ca şi în cazul vitezelor, distribuția accelerațiilor este funcție de spațiu şi timp. Pentru determinarea accelerației punctului M se derivează în raport cu timpul relația (4.15). Folosind scrierea matriceală, față de reperul E aceasta are forma:

$$\vec{v}_M = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left\{\dot{R}_O\right\} + \left\{\vec{i}_0\right\}^t [S]^t [\omega]\{r\}. \tag{4.17}$$

Dacă se derivează (4.17) în raport cu timpul se obține:

$$\vec{a}_M = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left\{\ddot{R}_O\right\} + \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left[\dot{S}\right]^t [\omega]\{r\} + \left\{\vec{i}_0\right\}^t [S]^t \left[\dot{\omega}\right]\{r\} + \left\{\vec{i}_0\right\}^t [S]^t [\omega]\left\{\dot{r}\right\} =$$

$$= \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left\{\ddot{R}_O\right\} + \left\{\vec{i}\right\}^t [S]\left[\dot{S}\right]^t [\omega]\{r\} + \left\{\vec{i}\right\}^t \left[\dot{\omega}\right]\{r\} = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left\{\ddot{R}_O\right\} +$$

$$+ \left\{\vec{i}\right\}^t [\varepsilon]\{r\} + \left\{\vec{i}\right\}^t [\omega][\omega]\{r\}.$$

În scriere vectorială:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right) \tag{4.18}$$

în care: $\vec{a}_M = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left\{\ddot{R}_O\right\}$ este accelerația originii reperului propriu față de reperul exterior; $\vec{\varepsilon}\,(t)$ este accelerația unghiulară a solidului rigid.

Matricea coloană atașată vectorului accelerație este:

$$\{a_M\} = \{a_O\} + [\varepsilon]\{r\} + [\omega]^2\{r\}. \tag{4.18.a}$$

În general relația (4.18), numită și relația Rivals, se extrapolează pentru două puncte oarecare M și P ale solidului rigid.

$$\vec{a}_M = \vec{a}_P + \vec{\varepsilon} \times \vec{PM} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{PM}\right). \tag{4.19}$$

4.7. Mişcări particulare ale solidului rigid

Se vor prezenta în continuare câteva mişcări simple ale solidului rigid necesare pentru înțelegerea parametrilor cinematici ce caracterizează mişcarea acestuia, în special vectorul viteză unghiulară şi accelerație unghiulară.

4.7.1. Mişcarea de translație

Un rigid execută o mişcare de translație dacă orice dreaptă a sa rămâne paralelă, în timpul mişcării, cu suportul său inițial. Dacă, la momentul inițial, axelele reperului propriu P se aleg paralele cu axele reperului exterior E, acest paralelism se va păstra pe tot parcursul mişcării (fig. 4.6).

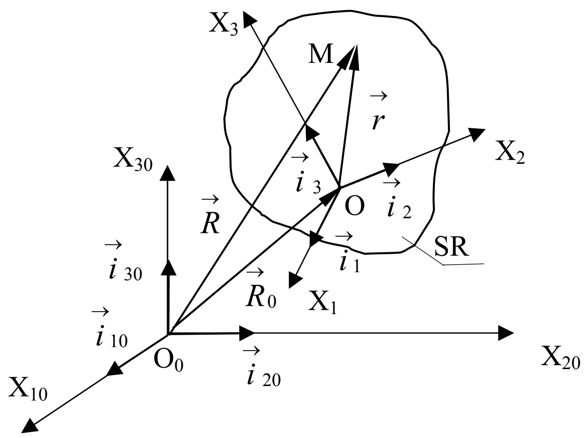


Fig. 4.6

Prin urmare matricea de schimbare de bază de la reperul E la reperul P este:

$$[S]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.20}$$

si rezultă:

$$[\omega]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Deci viteza unghiulară a solidului rigid este nulă:

$$\vec{\omega}=\vec{0} \tag{4.22}$$

Evident că şi accelerația unghiulară este tot nulă:

$$\vec{\varepsilon}=\vec{0} \tag{4.23}$$

Cu relațiile Euler şi Rivals se obține, pentru orice punct M al solidului rigid:

$$\vec{v}_M=\vec{v}_O;\qquad \vec{a}_M=\vec{a}_O \tag{4.24}$$

Deci, la orice moment, toate punctele solidului au aceeați viteză şi acceaşi accelerație, aceşti vectori putând fi considerați vectori liberi.

Fie M şi N două puncte ale solidului rigid. Se poate scrie:

$$\overrightarrow{O_0M}=\overrightarrow{O_0N}+\overrightarrow{NM} \tag{4.25}$$

Deoarece vectorul $\overrightarrow{NM}$ are direcția constantă, rezultă că traiectoria oricărui punct al solidului rigid se obține din traiectoria altui punct printr-o translație geometrică.

După tipul curbelor descrise de punctele solidului rigid în timpul mişcării de translație aceasta poate fi rectilinie sau curbilinie, plană sau spațială.

Observație: Î cazul mişcării de translație, în general, solidul rigid are trei grade de libertate.

4.7.2. Mişcarea de rotație

Un solid rigid efectuează mişcare de rotație dacă două puncte ale sale rămân fixe în timpul mişcării. Dreapta definită de cele două puncte fixe se numeşte *axă de rotație*. Se va demonstra că toate punctele solidului rigid aflate pe această axă sunt la rândul lor fixe.

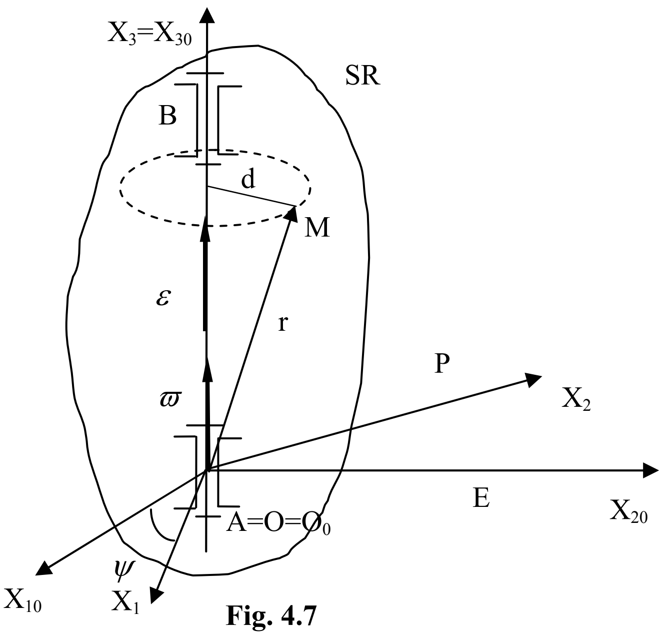


Fig. 4.7

Fie A şi B cele două puncte fixe. Se aleg sistemele de referinţă E şi P cu originea în punctul A (fig. 4.7). Cu această alegere, matricea ataşată vectorului $\vec{R}_O$ este:

$$\{R_O\} = \{0;\ 0;\ 0\}^t \tag{4.26}$$

Axele O_0x_{30} şi Ox_3 se aleg pe axa definită de punctele A şi B. Celelalte axe se aleg în planul perpendicular în A pe axa de rotaţie. Se notează cu ψ ungiul dintre axele O_0x_{10} şi Ox_1. Deoarece mişcarea solidului rigid este definită numai de unghiul ψ, în cazul mişcării de rotaţie solidul are un singur grad de libertate.

Matricea de schimbare de bază va avea forma:

$$[S] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Dacă $\vec{r} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{x_1;\ x_2;\ x_3\}^t$ este vectorul de poziţie al unui punct M, faţă de reperul P, atunci, ţinând cont de relaţia anterioară, se obţine:

$$\vec{R} = \left\{\vec{i}_0\right\}^t [S]^t \{x_1;\ x_2;\ x_3\}^t = \left\{\vec{i}_0\right\}^t$$

$$\{x_1 \cdot \cos\psi - x_2 \cdot \sin\psi;\ x_1 \cdot \sin\psi + x_2 \cdot \cos\psi;\ x_3\} = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \{x_{10};\ x_{20};\ x_{30}\}.$$

Se observă imediat că x_{10}, x_{20}, x_{30}, coordonatele lui M faţă de reperul E verifică ecuaţiile:

$$(x_{10})^2 + (x_{20})^2 = x_1^2 + x_2^2 = d^2$$

$$x_{30} = x_3. \tag{4.28}$$

x_1, x_2, x_3 fiind constante, relaţiile (4.28) reprezintă ecuaţiile unui cerc, deci, în cazul mişcării circulare traiectoriile punctelor solidului rigid sunt cercuri.

Rezultă matricea antisimetrică ataşată vitezei unghiulare:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

Viteza unghiulară a solidului rigid este deci:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{i}_3\ . \tag{4.30}$$

Acceleraţia unghiulară a solidului rigid este:

$$\vec{\varepsilon} = \ddot{\psi}\,\vec{i}_3\ . \tag{4.31}$$

Distribuţia de viteze se obţine cu relaţia lui Euler, în care, viteza originii reperului propriu este nulă:

$$\vec{v}=\left\{\vec{i}\right\}^t[\omega]\{r\}=\left\{\vec{i}\right\}^t\left\{-\dot{\psi}x_2;\dot{\psi}x_1;0\right\}^t. \tag{4.32}$$

Studiul relației (4.33) relevă unele proprietăți ale câmpului de viteze la solidul rigid în mişcare de rotație:

- viteza punctului M este paralelă cu planul Ox_1x_2 (viteza are componentă nulă pe axa Ox_3);
- vectorul viteză este perpendicular pe vectorul de poziție al punctului (deoarece $\vec{v}\cdot\vec{r}=0$). De fapt vectorul viteză este perpendicular şi pe dreapta ce trece prin M şi este perpendiculară pe axa de rotație;
- punctele de pe axa de rotație, care au $x_1=0$ şi $x_2=0$, au viteză nulă. Acest lucru arată că, într-adevăr, toate punctele de pe axa de rotație sunt fixe;
- mărimea vitezei creşte proporțional cu distanța până la axa de rotație:
- toate punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa de rotație au aceeaşi viteză;
- ecuațiile axei elicoidale instantanee, sunt:
  $x_1=0$; $x_2=0$, deci aceasta este chiar axa de rotație.

Câmpul de accelerații se determină cu formula Rivals, în care accelerația originii reperului propriu este nulă:

$$\vec{a}=\left\{\vec{i}\right\}^t\left([\varepsilon]+[\omega]^2\right)\{r\}=\left\{\vec{i}\right\}^t\left\{-\dot{\psi}^2x_1-\ddot{\psi}x_2;\ddot{\psi}x_1-\dot{\psi}^2x_2;0\right\}^t \tag{4.33}$$

Analiza relației (4.34) evidențiază o serie de proprietăți ale câmpului de accelerații:

- accelerațiile se găsesc în plane perpendiculare pe axa de rotație;
- punctele de pe axa de rotație au accelerație nulă;
- punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa de rotație au aceeaşi accelerație;
- mărimea accelerației creşte proporțional cu distanța până la axa de rotație:

4.7.3. Mişcarea plan-paralelă

Un rigid efectuează o mişcare plan paralelă când trei puncte ale sale, necoliniare, rămân în timpul mişcării într-un plan fix din spațiu, numit planul mişcării plan-paralele. În acest fel, planul solidului rigid determinat de cele trei puncte din enunț coincide cu planul mişcării.

Se alege sistemul de referință exterior cu originea O_0 şi axele O_0x_{10} şi O_0x_{20} în planul mişcării, iar axa O_0x_{30} perpendiculară pe acesta. Sistemul de referință propriu se alege cu originea O şi axele Ox_1 şi Ox_2 în planul solidului rigid care coincide cu planul mişcării şi axa Ox_3 perpendiculară pe acesta (fig. 4.8). Mişcarea solidului rigid este cunoscută dacă se cunosc coordonatele punctului O față de E $(x_{10O}=x; x_{20O}=y)$ şi unghiul ψ dintre axele O_0x_{10} şi Ox_1.

Vectorul $\vec{R}_O$ va avea expresia: $$\vec{R}_O=\left\{\vec{i}_0\right\}^t\{x;y;0\}^t. \tag{4.34}$$

Matricea de schimbare de bază este:

$$[S]=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{4.35}$$

Fie M un punct al solidului rigid care, față de reperul propriu, are vectorul de poziție

$$\vec{r} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{x_1;\, x_2;\, x_3\right\}^t . \qquad (4.36)$$

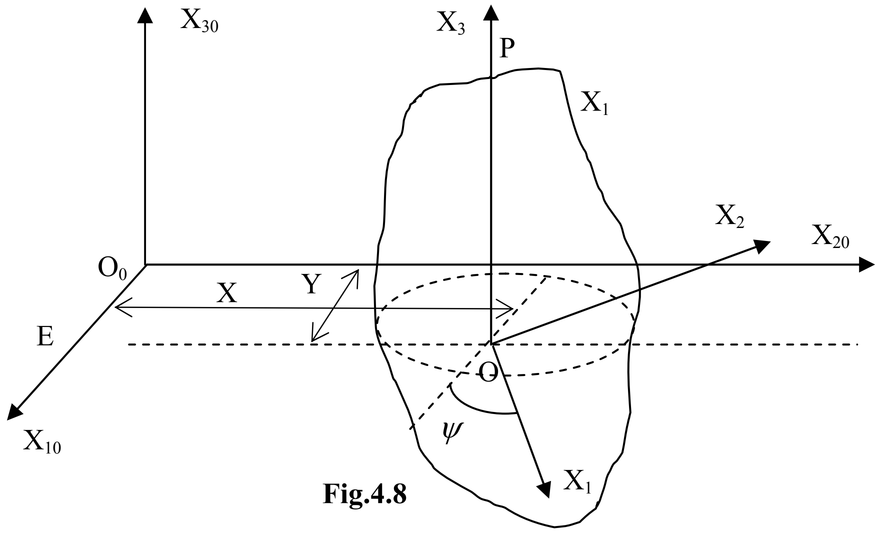


Fig.4.8

Față de reperul exterior, punctul M va avea vectorul de poziție:

$$\vec{R} = \vec{R}_O + \vec{r} = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \{x;y;0\}^t + \left\{\vec{i}_0\right\}^t [S]^t \{x_1;x_2;x_3\}^t =$$

$$= \left\{\vec{i}_0\right\}^t \cdot \{x + x_1 \cos\psi - x_2 \sin\psi;\, y + x_1 \sin\psi + x_2 \cos\psi;\, x_3\}^t \qquad (4.37)$$

Se observă că, în timpul mişcării, punctul M va rămâne în planul de ecuație $x_{30} = x_3$. De asemenea, traiectoria este identică cu traiectoria proiecției sale în planul mişcării.

Prin urmare studiul mişcării punctelor unui rigid poate fi redus la studiul mişcării punctelor din planul mişcării. Distribuția de viteze şi distribuția de accelerații în plane paralele cu planul mişcării este aceeaşi, din acest considerent această mişcare a solidului rigid se numeşte mişcare plan-paralelă.

Deoarece matricea de schimbare de bază are aceeaşi expresie ca la mişcarea de rotație şi mişcarea plană, viteza unghiulară şi accelerația unghiulară vor fi:

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\,\vec{i}_3 = \omega\,\vec{i}_3 = \left\{\vec{i}\right\}^t \{0;0;\omega\}^t$$

$$\vec{\varepsilon} = \ddot{\psi}\,\vec{i}_3 = \varepsilon\,\vec{i}_3 = \left\{\vec{i}\right\}^t \{0;0;\varepsilon\}^t . \qquad (4.38)$$

Cu relația Euler se determină viteza oricărui punct al solidului rigid:

$$\vec{v} = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left\{\dot{R}_O\right\} + \left\{\vec{i}\right\}^t [\omega]\{r\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left([S]\left\{\dot{R}_O\right\} + [\omega]\{r\}\right) =$$

$$= \left\{ \overrightarrow{i} \right\}^t \left\{ v_{O1} - \omega x_2 ; v_{O2} + \omega x_1 ; 0 \right\}^t . \tag{4.39}$$

În (4.39) s-au făcut notațiile:

$$v_{O1} = \dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi$$

$$v_{O2} = - \dot{x} \sin \psi + \dot{y} \cos \psi \tag{4.40}$$

care sunt proiecțiile vitezei punctului O pe axele reperului propriu.

Din analiza relației (4.39) se pot desprinde următoarele concluzii:

- viteza oricărui punct al solidului rigid este paralelă cu planul mişcării;
- ecuațiile axei elicoidale instantanee, sunt:

$$x_1 = - \frac{v_{O2}}{\omega}$$

$$x_2 = \frac{v_{O1}}{\omega} , \tag{4.41}$$

deci axa elicoidală instantanee este perpendiculară pe planul mişcării şi toate punctele de axa elicoidală instantanee au viteză nulă.

Mai mult, relația (4.39) se poate scrie sub forma:

$$\overrightarrow{v} = \left\{ \overrightarrow{i} \right\}^t \left\{ -\omega \left(x_2 - \frac{v_{O1}}{\omega} \right) ; \omega \left(x_1 + \frac{v_{O2}}{\omega} \right) ; 0 \right\}^t . \tag{4.42}$$

Aceasta arată că distribuția de viteze în solidul rigid, este similară celei de la mişcarea de rotație, ca şi cum rigidul s-ar roti în jurul axei elicoidale instantanee. De aceea, în acest caz, axa elicoidală instantanee se numeşte axă instantanee de rotație.

Intersecția axei instantanee de rotație cu planul mişcării se numeşte centru instantaneu de rotație (I) (fig. 4.9), deoarece are viteză nulă iar distribuția de viteze în planul mişcării este similară celei de rotație în jurul acestui punct. Intersecția suprafeței axoidale fixe cu planul mişcării se numeşte *centroidă fixă* sau *bază*. Intersecția suprafeței axoidale mobile cu planul mişcării se numeşte *centroidă mobilă*,sau *rulantă* sau *rostogolitoare*.

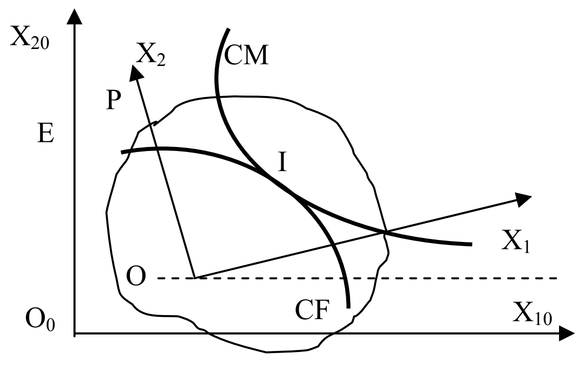


Fig.4.9

Distribuția de accelerații se obține cu relația Rivals:

$$\vec{a} = \left\{\vec{i}_0\right\}^t \left\{\ddot{R}_O\right\} + \left\{\vec{i}\right\}^t [\varepsilon]\{r\} + \left\{\vec{i}\right\}^t [\omega]^2 \{r\}^t =$$

$$= \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{a_{O1} - \varepsilon x_2 - \omega^2 x_1 ; a_{O2} + \varepsilon x_1 - \omega^2 x_2 ; 0\right\}^t \tag{4.43}$$

în care:

$$a_{O1} = \ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi$$

$$a_{O2} = -\ddot{x}\sin\psi + \ddot{y}\cos\psi \tag{4.44}$$

sunt proiecțiile accelerației punctului O pe axele reperului propriu.

Se observă că, în planul mişcării, există un punct (J), numit centru instantaneu al accelerațiilor, care are accelerație nulă. Cordonatele acestui punct față de reperul propriu se obțin imediat din relația $\vec{v}_J = \vec{0}$.

Rezultă:

$$x_{1J} = \frac{a_{O1}\omega^2 - \varepsilon a_{O2}}{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

$$x_{2J} = \frac{a_{O1}\varepsilon + \omega^2 a_{O2}}{\omega^4 + \varepsilon^2} \tag{4.45}$$

4.8.Aplicații

Aplicația 4.1. Un cub de latură l execută mişcare de rotație cu viteza unghiulară $\left|\vec{\omega}\right| = \sqrt{2}\,t$ în jurul unei diagonale a unei fețe ale sale. Să se determine vitezele şi accelerațiile vârfurilor cubului.

Rezolvare

Fie O şi B vârfurile cubului care determină axa de rotație. Se alege sistemul de referință al cubului cu originea în punctul O şi axele orientate după laturile cubului care trec prin acest punct. Cu alegerea astfel făcută, coordonatele vârfurilor cubului sunt: $O(0;0;0)$; $A(b;0;0)$; $B(b;b;0)$; $C(0;b;0)$; $D(b;0;b)$; $E(b;b;b)$; $F(0;b;b)$; $G(0;0;b)$.

Viteza unghiulară a cubului este:

$$\vec{\omega} = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \frac{\vec{OB}}{\left|\vec{OB}\right|} = t\,\vec{i}_1 + t\,\vec{i}_2 .$$

Accelerația unghiulară a cubului este:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 .$$

Deoarece punctele O şi B se află pe axa de rotație vor avea viteză şi accelerație nulă:

$\vec{v}_O = 0$; $\vec{v}_B = 0$; $\vec{a}_O = 0$; $\vec{a}_B = 0$.

Vitezele vârfurilor cubului se determină cu relația Euler:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Se obține succesiv:

- viteza punctului A:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OA} = -bt\,\vec{i}_3$$

$$\left|\vec{v}_A\right| = bt$$

- viteza punctului C:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OC} = bt\,\vec{i}_3$$

$$\left|\vec{v}_C\right| = bt$$

- viteza punctului D:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OD} = bt\,\vec{i}_1 - bt\,\vec{i}_2 - bt\,\vec{i}_3$$

$$\left|\vec{v}_D\right| = bt\sqrt{3}$$

- viteza punctului G:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OG} = bt\,\vec{i}_1 - bt\,\vec{i}_2$$

$$\left|\vec{v}_G\right| = bt\sqrt{2}$$

- viteza punctului F:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OF} = bt\,\vec{i}_1 - bt\,\vec{i}_2 + bt\,\vec{i}_3$$

$$\left|\vec{v}_F\right| = bt\sqrt{3}$$

- viteza punctului E:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OE} = bt\,\vec{i}_1 - bt\,\vec{i}_2$$

$$\left|\vec{v}_E\right| = bt\sqrt{2}.$$

Accelerațiile vârfurilor cubului se calculează cu relația Rivals:

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}\right).$$

Se oține:

- accelerația punctului A:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{OA} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{OA}\right) = -bt^2\,\vec{i}_1 + bt^2\,\vec{i}_2 - b\,\vec{i}_3$$

$$\left|\vec{a}_A\right| = b \cdot \sqrt{1 + 2t^4}$$

- accelerația punctului C:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{OC} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{OC}\right) = bt^2\,\vec{i}_1 - bt^2\,\vec{i}_2 + b\,\vec{i}_3$$

$$\left|\vec{a}_C\right| = b \cdot \sqrt{1 + 2t^4}$$

- accelerația punctului D:

$$\vec{a}_D = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}\times\vec{OD} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{OD}\right) = b\left(1-t^2\right)\vec{i}_1 + b\left(t^2-1\right)\vec{i}_2 - b\left(1+2t^2\right)\vec{i}_3$$

$$\left|\vec{a}_D\right| = b\cdot\sqrt{3+6t^4}$$

- accelerația punctului G:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}\times\vec{OG} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{OG}\right) = b\,\vec{i}_1 - b\,\vec{i}_2 - 2bt^2\,\vec{i}_3$$

$$\left|\vec{a}_G\right| = b\cdot\sqrt{2+4t^4}$$

- accelerația punctului F:

$$\vec{a}_F = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}\times\vec{OF} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{OF}\right) = b\left(1-t^2\right)\vec{i}_1 + b\left(t^2-1\right)\vec{i}_2 + b\left(1+2t^2\right)\vec{i}_3$$

$$\left|\vec{a}_F\right| = b\cdot\sqrt{3+6t^4}$$

- accelerația punctului E:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}\times\vec{OE} + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{OE}\right) = b\,\vec{i}_1 - b\,\vec{i}_2 - 2bt^2\,\vec{i}_3$$

$$\left|\vec{a}_E\right| = b\cdot\sqrt{2+4t^4}\ .$$