2.TEORIA MOMENTELOR

2.1. Momentul unui vector în raport cu un punct

În natură, asupra sistemelor mecanice acţionează diferite sisteme de vectori. Se pune problema stabilirii condiţiilor de echivalenţă între două sisteme de vectori astfel încât să aibă acelaşi efect mecanic, precum şi găsirea celui mai simplu sistem de vectori echivalent mecanic cu un sistem dat.

Fie vectorul $\vec{a}$ cu punctul de aplicaţie A. Momentul vectorului $\vec{a}$ faţă de un punct O este definit ca produsul vectorial al vectorilor $\vec{OA}$ şi $\vec{a}$:

$$\vec{M}_O\left(\vec{a}\right) = \vec{OA} \times \vec{a} \tag{2.1}$$

În concordanţă cu definiţiile produsului vectorial, momentul unui vector în raport cu un punct $\vec{M}_0(\vec{a})$ este un vector perpendicular pe planul vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{OA}$ avînd mărimea egală cu aria triunghiului definit de cei doi vectori. Punctul O se numeşte *originea* sau *polul* momentului.

Dacă, fără a pierde generalitatea, O este originea unui sistem de referinţă faţă de care vectorul $\vec{OA}$ are ataşată matricea coloană $\{OA\} = \{x_1; x_2; x_3\}^t$ (unde x_1, x_2, x_3 sunt coordonatele punctului A faţă de sistemul de referinţă precizat) atunci, cu (1.21), se poate scrie:

$$\vec{M}_O\left(\vec{a}\right) = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{M_O\left(\vec{a}\right)\right\} = \left\{\vec{i}\right\}^t [OA]\{a\} \tag{2.2}$$

Conform relaţiei de mai sus, matricea componentelor momentului $\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)$ se va calcula cu:

$$\left\{M_O\left(\vec{a}\right)\right\} = [OA]\{a\} \tag{2.3}$$

Detaliat se obţine:

$$M_{O1} = x_2 a_3 - x_3 a_2; \qquad M_{O2} = x_3 a_1 - x_1 a_3$$
$$M_{O3} = x_1 a_2 - x_2 a_1 \tag{2.4}$$

Momentul $\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)$ are următoarele proprietăţi:

1. $\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)$ nu se modifică dacă vectorul $\vec{a}$ glisează pe suportul său. Întradevăr dacă B este noul punct de aplicaţie al vectorului $\vec{a}$ atunci: $\vec{OB} \times \vec{a} = \left(\vec{OA} + \vec{AB}\right) \times \vec{a} = \vec{OA} \times \vec{a} + \vec{AB} \times \vec{a} = \vec{OA} \times \vec{a}$, deoarece conform relaţiei $\vec{AB} \times \vec{a} = \vec{0}$ (fiind vectori coliniari).

Dacă originea vectorului $\vec{a}$ nu se deplasează pe suportul său, atunci momentul acestui vector faţă de punctul O se va modifica deoarece produsul vectorial $\vec{AB} \times \vec{a}$ nu va mai fi nul.

2. Momentul $\overrightarrow{M}_O\left(\overrightarrow{a}\right)$ este nul dacă vectorul $\overrightarrow{a}$ este nul sau dacă suportul său trece prin punctul O. Acest lucru este evident deoarece, conform definiției produsului vectorial, $\left|\overrightarrow{M}_O\left(\overrightarrow{a}\right)\right| = \overrightarrow{0}$ dacă $\left|\overrightarrow{a}\right| = 0$ sau $\left|\overrightarrow{OA}\right| = 0$ sau $\sin\left(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{a}\right) = 0$, aceste ultime relații corespunzând cazului când dreapta definită de vectorul $\overrightarrow{a}$ trece prin O.

3. Formula de schimbare de pol: dacă se calculează momentul vectorului $\overrightarrow{a}$ față de alt pol $O' \neq O$, atunci:

$$\overrightarrow{M}_{O'}\left(\overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{O'A} \times \overrightarrow{a} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O'O}\right) \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{M}_O\left(\overrightarrow{a}\right) + \overrightarrow{O'O} \times \overrightarrow{a}\ , \tag{2.5}$$

deci, momentul unui vector în raport cu pol O' este egal cu momentul vectorului $\overrightarrow{a}$ în raport cu O, la care se adaugă momentul în raport cu O' al aceluiaşi vector $\overrightarrow{a}$, considerat însă cu originea în O.

Se observă că dacă polul se mută pe suportul vectorului $\overrightarrow{a}$ ($\overrightarrow{OO'}\ \chi\ \overrightarrow{a}$), vectorii moment $\overrightarrow{M}_O$ şi $\overrightarrow{M}_{O'}$ sunt egali.

2.2. Momentul unui vector față de o axă

Fie o axă (Δ) de versor $\overrightarrow{u}$ iar O şi O' două puncte ale acestei drepte. Momentele vectorului $\overrightarrow{a}$ (legat sau alunecător) față de punctele O şi O' sunt legate prin relația (2.5). Înmulțind scalar cu versorul $\overrightarrow{u}$ şi ținând cont că $\left(\overrightarrow{O'O} \times \overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{u} = 0$, se obține:

$$\overrightarrow{M}_{O'}\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{M}_O\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{u} \tag{2.6}$$

Prin urmare, proiecția pe axă a momentului unui vector $\overrightarrow{a}$ față de un pol O al axei are valoarea independentă de poziția punctului O pe axă.

Această proprietate conduce la introducerea noțiunii de *moment al unui vector*, legat sau alunecător, *față de o axă*. Prin *definiție*, momentul unui vector $\overrightarrow{a}$ față de o axă (Δ), notat M_Δ, este egal cu proiecția pe această axă a momentului lui $\overrightarrow{a}$ față de un punct oarecare O al ei.

$$M_\Delta = \overrightarrow{M}_O\left(\overrightarrow{a}\right) \cdot \overrightarrow{u} \tag{2.7}$$

În conformitate cu definițiile produselor scalar şi vectorial, valoarea absolută a momentului unui vector față de o axă oarecare este egală cu produsul dintre lungimea vectorului şi distanța dintre suportul acestuia şi axa considerată, înmulțit cu sinusul unghiului dintre vector şi axă.

Analiza relației (2.7), ținând cont de definiția (2.1) a lui $\vec{M}_O\left(\vec{a}\right)$, relevă faptul că M_Δ este nul dacă vectorul $\vec{a}$ este nul, sau dacă suportul său este coplanar cu axa (Δ).

2.3. Torsorul unui sistem de vectori

Se consideră un sistem (S) de vectori legați sau alunecători $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, cu punctele de aplicație $A_1, A_2, ..., A_n$. Prin *definiție*, *torsorul de reducere* al sistemului de vectori (S), într-un punct O, este format din doi vectori şi anume:

- *rezultanta* sistemului de vectori:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \tag{2.8}$$

- *momentul rezultant* în punctul O al sistemului de vectori:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O\left(\vec{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA}_i \times \vec{a}_i \tag{2.9}$$

Punctul O se numeşte *originea* sau *polul tosorului*.

Dacă O este originea unui sistem de referință atunci vectorii $\vec{OA}_i = \vec{r}_i$ vor avea ataşate matricele $\{r_i\} = \{x_{1i}; x_{2i}; x_{3i}\}^t$ care au componente chiar coordonatele punctelor A_i. Matricele coloană ataşate vectorilor ce compun torsorul de reducere al sistemului (S) se calculează cu relațiile:

$$\{R\} = \sum_{i=1}^{n} \{a_i\} \quad . \tag{2.10}$$

$$\{M_O\} = \sum_{i=1}^{n} [r_i]\{a_i\} = -\sum_{i=1}^{n} [a_i]\{r_i\}. \tag{2.11}$$

Condiția necesară şi suficientă ca două sisteme de vectori să fie echivalente între ele este ca să aibă acelaşi torsor într-un punct oarecare din spațiu. În particular, condiția necesară şi suficientă ca un sistem de vectori alunecători să fie echivalent cu zero este ca torsorul său să fie nul într-un punct oarecare.

Proprietățile torsorului

1) Torsorul sistemului (S) nu se modifică dacă vectorii alunecă pe suportul lor.

2) *Relația de schimbare de pol*: dacă O' este alt punct diferit de O, torsorul de reducere în acest punct este format din rezultanta:

$\vec{R}' = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$ şi

- momentul rezultant:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{O'A}_i \times \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{O'O} + \vec{OA}_i\right) \times \vec{a}_i = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{R} = \vec{M}_O - \vec{OO'} \times \vec{R} \, . \tag{2.12}$$

3) *Invarianții* sistemului de vectori. Se observă că rezultanta $\vec{R}$ nu depinde de punctul de reducere, deci este un invariant al torsorului. Un alt invariant se pune în evidență prin înmulțirea scalară cu $\vec{R}$ a relației (2.12). Se obține:

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} - \left(\vec{O'O} \times \vec{R}\right) \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} \, .$$

Prin urmare produsul:

$$T = \vec{M}_O \cdot \vec{R} \tag{2.13}$$

nu depinde nici el de punctul de reducere. T se numeşte *trinom invariant* sau *scalarul torsorului.*

Scalarul torsorului rezultant a "n" vectori alunecători este egal cu suma momentelor reciproce ale tuturor vectorilor luați doi cîâte doi.

4) Dacă $\vec{R} = \vec{0}$, conform relației de schimbare de pol (2.5), nici momentul rezultant nu depinde de pol, deci, pentru sistemele pentru care rezultanta este nulă, momentul rezultant poate fi considerat vector liber, fiind şi el invariant față de schimbarea polului.

Dacă polul se deplasează pe direcția rezultantei, momentul rezultant nu se schimbă.

2.4. Axa centrală a sistemului de vectori

Se consideră sistemul de vectori (S) care în originea O a unui sistem de referință are torsorul de reducere format din rezultanta $\vec{R}$, nenulă, şi momentul rezultant $\vec{M}_O$ care se calculează cu relațiile (2.8) şi (2.9).

Mulțimea punctelor P , din spațiu, pentru care rezultanta şi momentul rezultant sunt *coliniare* este o *dreaptă* numită *axa centrală* a sistemului de vectori.

Într-adevăr conform formulei (2.12):

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O - \vec{r} \times \vec{R} \tag{2.14}$$

în care $\vec{r} = \vec{OP}$. Deoarece pentru punctul P , rezultanta $\vec{R}$ şi momentul rezultant $\vec{M}_P$ sunt coliniare se poate scrie:

$$\vec{R} \times \vec{M}_P = \vec{0} \tag{2.15}$$

Înlocuind (2.15) în (2.14), se poate scrie:

$$\vec{0} = \vec{R} \times \vec{M}_O - \left(\vec{R} \cdot \vec{R}\right)\vec{r} + \left(\vec{R} \cdot \vec{r}\right)\vec{R} \tag{2.16}$$

Din această relație se poate deduce expresia lui $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \lambda \vec{R} \tag{2.17}$$

în care:

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_0}{\vec{R} \cdot \vec{R}} ; \ \lambda = \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{\vec{R} \cdot \vec{R}} \tag{2.18}$$

Relația (2.19) este ecuația vectorială a unei drepte care trece prin punctul C având vectorul de poziție $\vec{r}_C$ şi este paralelă cu rezultanta $\vec{R}$.

Pentru a prezenta sub formă scalară ecuația axei centrale se scrie relația (2.14) sub formă matriceală:

$$\{M_P\} = \{M_O\} + [R]\{r\} \tag{2.19}$$

în care $\{M_O\} = \{M_{O1}; M_{O2}; M_{O3}\}^t$ este matricea coloană ataşată lui $\vec{M_O}$, $\{r\} = \{x_1; x_2; x_3\}^t$ este matricea coloană ataşată lui $\vec{r}$ iar: $[R] = \begin{bmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{bmatrix}$ este matricea antisimetrică ataşată lui $\vec{R}$.

Deoarece $\vec{M_P}$ este paralel cu $\vec{R}$ se poate scrie:

$$\{M_O\} + [R]\{r\} = k \cdot \left\{\vec{R}\right\} \tag{2..20}$$

care detaliat dă:

$$\begin{aligned} M_{O1} - R_3 x_2 + R_2 x_3 &= kR_1 \\ M_{O2} + R_3 x_1 - R_1 x_3 &= kR_2 \\ M_{O3} - R_2 x_1 + R_1 x_2 &= kR_3 . \end{aligned} \tag{2.21}$$

Eliminând în (2.21) constanta k se obține ecuația axei centrale:

$$\frac{M_{O1} - R_3 x_2 + R_2 x_3}{R_1} = \frac{M_{O2} + R_3 x_1 - R_1 x_3}{R_2} = \frac{M_{O3} - R_2 x_1 + R_1 x_2}{R_3} \tag{2.22}$$

dată ca intersecție a două plane.

Momentul rezultant calculat în raport cu punctele situate pe axa centrală are valoare minimă şi se numeşte *momentul minimal*.

2.5. Aplicații

Aplicația 2.1. Față de un sistem de referință $Ox_1x_2x_3$ se consideră vectorii $\vec{a} = 2\vec{i_1} + 3\vec{i_2}\,0 - \vec{i_3}$ şi $\vec{b} = \vec{i_1} - 2\vec{i_2} + 3\vec{i_3}$ care au punctele de aplicație $A(1;0;1)$ şi $B(2;1;-1)$. Se cer:

1) Momentul reciproc al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$.
2) Momentele celor doi vectori față de originea O a sistemului de referință.
3) Momentul vectorului $\vec{a}$ față de dreapta (Δ_1) definită de ecuațiile:
   $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 9 . \end{aligned}$$
4) Momentul vectorului $\vec{b}$ față de dreapta (Δ_2) care trece prin punctul $P(1;2;1)$ şi are versorul $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i_1} + \frac{4}{5}\vec{i_2}$.

Rezolvare:

1) Vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se pot scrie sub forma:

$$\vec{a} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{a\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{2;3;-1\}^t$$

$$\vec{b} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{b\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{1;-2;3\}^t .$$

Vectorii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ sunt:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{r_A} = \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t \{r_A\} = \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t \{1;0;1\}^t$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{r_B} = \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t \{r_B\} = \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t \{2;1;-1\}^t$$

şi au matricile antisimetrice ataşate:

$$[r_A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \ [r_B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A} = \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t (\{r_B\} - \{r_A\}) = \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t \{1;1;-2\}^t$

şi are ataşată matricea antisimetrică:

$$[AB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Momentul reciproc al vectorilor $\overrightarrow{a}$ şi $\overrightarrow{b}$ este:

$$m\left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{b}\right) = \left(\overrightarrow{a};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{b}\right) = \{a\}^t[AB]\{b\} = \{2;3;-1\}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix} = -14$$

2) Momentul vectorului $\overrightarrow{a}$ față de punctul O este:

$$M_O\left(\overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{a} = \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t [r_A]\{a\} = \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t \cdot \{-3;3;3\}^t = -3\overrightarrow{i_1} + 3\overrightarrow{i_2} + 3\overrightarrow{i_3}.$$

Momentul vectorului $\overrightarrow{b}$ față de punctul O este:

$$M_O\left(\overrightarrow{b}\right) = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{b} = \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t [r_B]\{b\} = \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix} =$$

$$= \left\{\overrightarrow{i}\right\}^t \cdot \{1;-7;-5\}^t = \overrightarrow{i_1} - 7\overrightarrow{i_2} - 5\overrightarrow{i_3}.$$

3) Pentru a găsi momentul vectorului $\overrightarrow{a}$ față de dreapta (Δ_1) se vor determina mai întâi două puncte ale acestei drepte. Pentru aceasta se va intersecta dreapta (Δ_1) cu două plane. Fie M punctul de intersecție al dreptei (Δ_1) cu planul de ecuație $x_1 = 0$. Coordonatele punctului M sunt: $M(0;-6;-3)$. Fie punctul de intersecție al dreptei (Δ_1) cu planul de ecuație $x_3 = 0$. Coordonatele punctului N sunt: $N(3;-3;0)$. Vectorul $\overrightarrow{MN}$ este:

$$\overrightarrow{MN}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\cdot\{MN\}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\cdot\{3;3;3\}^t.$$

Mărimea vectorului $\overrightarrow{MN}$ este:

$$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\{MN\}^t\cdot\{MN\}}=3\sqrt{3}.$$

Considerând orientarea dreptei (Δ_1) de la M la N, versorul dreptei (Δ_1) este:

$$\overrightarrow{u_1}=\frac{\overrightarrow{MN}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\left\{\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}^t=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\{u_1\}.$$

Vectorul $\overrightarrow{MA}$ este:

$\overrightarrow{MA}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\cdot\{MA\}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\cdot\{1;6;4\}^t$ şi are ataşată matricea antisimetrică:

$$[MA]=\begin{bmatrix}0 & -4 & 6\\ 4 & 0 & -1\\ -6 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Momentul vectorului $\overrightarrow{a}$ în raport cu punctul M este:

$$M_M\left(\overrightarrow{a}\right)=\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{a}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t[MA]\{a\}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\begin{bmatrix}0 & -4 & 6\\ 4 & 0 & -1\\ -6 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2\\ 3\\ -1\end{Bmatrix}=$$

$$=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\cdot\{-18;9;-9\}^t.$$

Momentul vectorului $\overrightarrow{a}$ în raport cu dreapta (Δ_1) este:

$$M_{\Delta_1}\left(\overrightarrow{a}\right)=\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{M_M}\left(\overrightarrow{a}\right)=-6\sqrt{3}.$$

4) Vectorul $\overrightarrow{PB}$ este:

$\overrightarrow{PB}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\cdot\{PB\}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\cdot\{1;-1;-2\}^t$ şi are ataşată matricea antisimetrică:

$$[PB]=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Momentul vectorului $\overrightarrow{b}$ în raport cu punctul P este:

$$M_P\left(\overrightarrow{b}\right)=\overrightarrow{PB}\times\overrightarrow{b}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t[PB]\{b\}=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ -2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{Bmatrix}=$$

$$=\left\{\overrightarrow{i}\right\}^t\cdot\{-7;-5;-1\}^t.$$

Momentul vectorului $\vec{b}$ în raport cu dreapta (Δ_2) este:

$$M_{\Delta_2}\left(\vec{b}\right) = \vec{u} \cdot \vec{M_P}\left(\vec{b}\right) = -\frac{41}{5}.$$

Aplicația 2.2. Se consideră sistemul de vectori $\vec{a_1} = \vec{i_1} + 2\vec{i_2} - \vec{i_3}$, $\vec{a_2} = 3\vec{i_1} - \vec{i_2}$, $\vec{a_3} = \vec{i_1} - 3\vec{i_2} + \vec{i_3}$, $\vec{a_4} = -\vec{i_1} + \vec{i_2} + 3\vec{i_3}$, având punctele de aplicație $A_1(1;0;2)$, $A_2(2;-1;1)$, $A_3(0;0;1)$, $A_4(-1;1;0)$. Se cer:

1) Să se determine torsorul de reducere al sistemului de vectori, în punctul O, origine a sistemului de referință.
2) Să se determine torsorul de reducere al sistemului de vectori, în punctul $B(1;0;1)$.
3) Să se determine axa centrală a sistemului de vectori.

Rezolvare:

1) Rezultanta sistemului de vectori este:

$$\vec{R} = \vec{a_1} + \vec{a_2} + \vec{a_3} + \vec{a_4} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{1;2;-1\}^t + \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{3;-1;0\}^t + \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot$$

$$\cdot \{1;-3;1\}^t + \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{-1;1;3\}^t = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{4;-1;3\}^t = 4\vec{i_1} - \vec{i_2} + 3\vec{i_3}.$$

Momentul rezultant în punctul O al sistemului de vectori este:

$$\vec{M_O} = \vec{M_O}\left(\vec{a_1}\right) + \vec{M_O}\left(\vec{a_2}\right) + \vec{M_O}\left(\vec{a_3}\right) + \vec{M_O}\left(\vec{a_4}\right) = \vec{OA_1} \times \vec{a_1} + \vec{OA_2} \times \vec{a_2} + \vec{OA_3} \times \vec{a_3} +$$

$$+ \vec{OA_4} \times \vec{a_4} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left[OA_1\right]\left\{a_1\right\} + \left\{\vec{i}\right\}^t \left[OA_2\right] \cdot \left\{a_2\right\} + \left\{\vec{i}\right\}^t \left[OA_3\right]\left\{a_3\right\} + \left\{\vec{i}\right\}^t \left[OA_4\right]\left\{a_4\right\} =$$

$$= \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} + \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{3;10;3\}^t = 3\vec{i_1} + 10\vec{i_2} + 3\vec{i_3}.$$

2) Rezultanta sistemului de vectori are aceeași expresie.
Pentru determinarea momentului rezultant în punctul B trebuie calculați vectorii:

$$\vec{BA_1} = \vec{OA_1} - \vec{OB} = \vec{i_3} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{0;0;1\}^t$$

$$\vec{BA_2} = \vec{OA_2} - \vec{OB} = \vec{i_1} - \vec{i_2} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{1;-1;0\}^t$$

$$\vec{BA_3} = \vec{OA_3} - \vec{OB} = -\vec{i_1} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{-1;0;0\}^t$$

$$\overrightarrow{BA_4} = \overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OB} = -2\,\vec{i}_1 + \vec{i}_2 - \vec{i}_3 = \left\{\vec{i}\right\}^t \{-2;1;-1\}^t .$$

Momentul rezultant în punctul B al sistemului de vectori este:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_B\left(\vec{a}_1\right) + \vec{M}_B\left(\vec{a}_2\right) + \vec{M}_B\left(\vec{a}_3\right) + \vec{M}_B\left(\vec{a}_4\right) = \overrightarrow{BA_1}\times\vec{a}_1 + \overrightarrow{BA_2}\times\vec{a}_2 + \overrightarrow{BA_3}\times\vec{a}_3 +$$

$$+ \overrightarrow{BA_4}\times\vec{a}_4 = \left\{\vec{i}\right\}^t [BA_1]\{a_1\} + \left\{\vec{i}\right\}^t [BA_2]\cdot\{a_2\} + \left\{\vec{i}\right\}^t [BA_3]\{a_3\} + \left\{\vec{i}\right\}^t [BA_4]\{a_4\} =$$

$$= \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} + \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{2;9;4\}^t = 2\,\vec{i}_1 + 9\,\vec{i}_2 + 4\,\vec{i}_3 .$$

Momentul rezultant în punctul B se poate calculaşi cu formula de schimbare de pol:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_O - \overrightarrow{OB}\times\vec{R} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{M_O\} - \left\{\vec{i}\right\}^t [OB]\cdot\{R\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{3;10;3\}^t - \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{2;9;4\}^t = 2\,\vec{i}_1 + 9\,\vec{i}_2 + 4\,\vec{i}_3 .$$

Se verifică în acest fel corectitudinea calculelor precedente.

3) Ecuația axei centrale este dată de relația (2.15):

$$\frac{3 - 3x_2 - x_3}{4} = \frac{10 + 3x_1 - 4x_3}{-1} = \frac{3 + x_1 + 4x_2}{3}$$

care poate fi pusă ca intersecție a două plane

$$\begin{cases} 12x_1 - 3x_2 - 13x_3 + 43 = 0 \\ 10x_1 + 4x_2 - 12x_3 + 33 = 0 \end{cases} .$$

Aplicația 2.3. Se consideră vectorii paraleli $\vec{a}_1 = 2\,\vec{i}_1$, $\vec{a}_2 = -3\,\vec{i}_1$, $\vec{a}_3 = 4\,\vec{i}_1$, $\vec{a}_4 = -\,\vec{i}_1$, având punctele de aplicație $A_1(2;1;0)$, $A_2(0;-1;1)$, $A_3(1;0;1)$, $A_4(0;0;2)$. Se cere:

1) Torsorul de reducere în raport cu originea sistemului de referință.
2) Axa centrală a sistemului de vectori.

Rezolvare:

1) Rezultanta sistemului de vectori este:

$$\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{2;0;0\}^t + \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{-3;0;0\}^t +$$

$$+ \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{4;0;0\}^t + \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{-1;0;0\}^t = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{2;0;0\}^t = 2\,\vec{i}_1 .$$

Vectorii de poziție ai punctelor de aplicație față de originea sistemului de referință sunt:

$$\vec{OA_1} = \vec{r_{A_1}} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{r_{A_1}\right\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{2;1;0\}^t$$

$$\vec{OA_2} = \vec{r_{A_2}} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{r_{A_2}\right\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{0;-1;1\}^t$$

$$\vec{OA_3} = \vec{r_{A_3}} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{r_{A_3}\right\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{1;0;1\}^t$$

$$\vec{OA_4} = \vec{r_{A_4}} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left\{r_{A_4}\right\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \cdot \{0;0;2\}^t$$

şi au ataşate următoarele matrici antisimetrice:

$$\left[r_{A_1}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \left[r_{A_2}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \left[r_{A_3}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\left[r_{A_4}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Momentul rezultant în punctul O este:

$$\vec{M_O} = \vec{M_O}\left(\vec{a_1}\right) + \vec{M_O}\left(\vec{a_2}\right) + \vec{M_O}\left(\vec{a_3}\right) + \vec{M_O}\left(\vec{a_4}\right) = \vec{OA_1} \times \vec{a_1} +$$

$$+ \vec{OA_2} \times \vec{a_2} + \vec{OA_3} \times \vec{a_3} + \vec{OA_4} \times \vec{a_4} = \left\{\vec{i}\right\}^t \left[r_{A_1}\right]\left\{a_1\right\} + \left\{\vec{i}\right\}^t \left[r_{A_2}\right]\left\{a_2\right\} +$$

$$+ \left\{\vec{i}\right\}^t \left[r_{A_3}\right]\left\{a_3\right\} + \left\{\vec{i}\right\}^t \left[r_{A_4}\right]\left\{a_4\right\} = \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \left\{\vec{i}\right\}^t \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left\{\vec{i}\right\}^t \{0;-1;-5\}^t = -\vec{i_2} - 5\vec{i_3}.$$

2) Ecuaţia axei centrale este:

$$\frac{0}{2} = \frac{-1-2x_3}{0} = \frac{-5+2x_2}{0}$$

de unde:

$$\begin{cases} 2x_3 + 1 = 0 \\ 2x_2 - 5 = 0 \end{cases}$$