

Dr. Aurel Diamandescu

ANALIZĂ MATEMATICĂ

PROBLEME REZOLVATE

Pentru studenții anului I,
cursuri cu frecvență redusă,
Facultatea de Electromecanică.

2006

Prefață

Această lucrare tratează teme referitoare la capitole importante din Analiza matematică

- Spații normate (problemele 1 - 5),
- Funcții continue (problemele 6 - 11)
- Funcții diferențiabile (problemele 12 - 22)
- Funcții integrabile (problemele 23 - 41)
- Teoria câmpurilor (problemele 42 - 46)

Metoda folosită: fiecare problemă este complet rezolvată, indicându-se aspectele teoretice folosite. Unele rezolvări sunt însoțite de comentarii.

Dorința autorului este ca lucrarea să fie de un real ajutor studenților Facultății de electromecanică, anul I (F.R) în străduințele lor de înțelegere și însușire a unor cunoștințe de Analiză matematică. Trimiterile de forma “vezi Teorema 7.2.5” se referă la Cursul de Analiză matematică, vol. I, II, Ed. Universitaria, Craiova, 2005, al autorului. Această teoremă este Teorema 5 din capitolul 7, paragraful 2. Volumul I al acestui Curs conține capitolele 1 - 6, iar volumul II, capitolele 7 - 12. Consultarea acestei cărți apare astfel absolut necesară.

Menționăm că sfârșitul rezolvării unei probleme este marcat cu semnul ■.

Autorul precizează faptul că această lucrare este o parte dintr-o lucrare mai amplă ce va apare în curând la Editura Universitaria din Craiova.

Craiova, Februarie 2006

Dr. Aurel Diamandescu

Problema 1

Să se arate că pe spațiul vectorial real \mathbb{R}^2 , fiecare din aplicațiile

a). $\| \cdot \|_e: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\|(x_1, x_2)\|_e = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

(norma euclidiană),

b). $\| \cdot \|_s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\|(x_1, x_2)\|_s = |x_1| + |x_2|$

(sum - norma),

c). $\| \cdot \|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\|(x_1, x_2)\| = \max \{ |x_1|, |x_2| \}$

(sup - norma),

este o normă. Să se arate că aceste norme sunt echivalente două câte două. Să se arate că numai una dintre ele este indusă de un produs scalar. Să se precizeze sferile corespunzătoare. Să se precizeze topologiile acestor norme. Să se dea exemple concrete de mulțimi deschise, închise, compacte, necompacte, conexe, neconexe, mărginite, nemărginite, convexe, neconvexe, în topologia indusă de aceste norme.

Rezolvare. Verificăm că fiecare aplicație satisface axiomele normei din Definiția 2.3.2.

a). 1. Pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, avem $\|x\|_e = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0$;

apoi, $\|x\|_e = 0 \iff \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = \theta$;

2. Pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ avem (Propoziția 2.3.2) $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ și atunci,

$$\|\alpha x\|_e = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2} = \sqrt{\alpha^2(x_1^2 + x_2^2)} = |\alpha| \|x\|_e;$$

3. Pentru orice $x = (x_1, x_2)$ și $y = (y_1, y_2)$ din \mathbb{R}^2 , avem (Propoziția 2.3.2) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ și ca urmare,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_e^2 &= (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 = \\ &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2) \leq \\ &\leq x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \\ &= (\|x\|_e + \|y\|_e)^2. \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$\|x + y\|_e \leq \|x\|_e + \|y\|_e.$$

Așadar, aplicația de la pc. a) este o normă pe \mathbb{R}^2 .

b). 1. Pentru $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, avem $\|x\|_s = |x_1| + |x_2| \geq 0$; apoi, $\|x\|_s = 0 \iff |x_1| + |x_2| = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = (0, 0) = \theta$;

2. Pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ avem

$$\|\alpha x\|_s = |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha| (|x_1| + |x_2|) = |\alpha| \|x\|_s$$

3. Pentru orice $x = (x_1, x_2)$ și $y = (y_1, y_2)$ din \mathbb{R}^2 , avem

$$\|x + y\|_s = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \leq$$

$$\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| = \|x\|_s + \|y\|_s.$$

Așadar, aplicația de la pc. b) este o normă pe \mathbb{R}^2 .

c). 1. Pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, avem în mod evident, $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} \geq 0$; apoi, $\|x\| = 0 \iff |x_1| = |x_2| = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = (0,0) = \theta$;

2. Pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$, avem

$$\|\alpha x\| = \max\{|\alpha x_1|, |\alpha x_2|\} =$$

$$= |\alpha| \max\{|x_1|, |x_2|\} = |\alpha| \|x\|;$$

3. Pentru orice $x = (x_1, x_2)$ și $y = (y_1, y_2)$ din \mathbb{R}^2 , avem

$$\|x + y\| = \max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|\} \leq$$

$$\leq \max\{|x_1| + |y_1|, |x_2| + |y_2|\} \leq \|x\| + \|y\|,$$

pentru că, în mod evident,

$$|x_1| + |y_1| \leq \|x\| + \|y\| \text{ și } |x_2| + |y_2| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Așadar, aplicația de la pc. c) este o normă pe \mathbb{R}^2 .

Se constată cu ușurință că pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^2$ au loc inegalitățile

$$\|x\| \leq \|x\|_e \leq \|x\|_s \leq \sqrt{2} \|x\|_e \leq 2\|x\|,$$

ceea ce arată că cele trei norme sunt echivalente două câte două.

Aplicând Teorema 2.3.6, se constată cu ușurință că norma euclidiană $\|\cdot\|_e$ este indusă de un produs scalar, și anume de produsul scalar euclidian (sau canonic) definit prin $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Aceasta înseamnă că $\|x\|_e = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Celelalte două norme de mai sus nu satisfac condiția din Teorema 2.3.6 (se pot avea în vedere vectorii $x = (-1, 2)$ și $y = (2, 1)$) și ca urmare, ele nu sunt induse de un produs scalar

Având în vedere Teorema 2.3.1, sfera deschisă cu centrul în punctul $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ și de rază $r > 0$, corespunzătoare unei norme $\|\cdot\|$ este $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| < r\}$. Concret,

- corespunzător normei euclidiene, avem

$$S(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$$

și este formată din toate punctele planului situate în interiorul cercului de rază r cu centrul în punctul $A(a_1, a_2)$;

- corespunzător sum - normei, avem

$$S(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r\}$$

și este formată din toate punctele planului situate în interiorul pătratului cu centrul în punctul $A(a_1, a_2)$ și care are diagonalele paralele cu axele de coordonate, lungimea lor fiind $2r$;

- corespunzător sup - normei, avem

$$S(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| < r, |x_2 - a_2| < r\}$$

și este formată din toate punctele planului situate în interiorul pătratului cu centrul în punctul $A(a_1, a_2)$ și care are laturile paralele cu axele de coordonate, lungimea lor fiind $2r$; cu alte cuvinte,

$$S(a, r) = (a_1 - r, a_1 + r) \times (a_2 - r, a_2 + r).$$

Conform cu Teorema 2.3.1, Definiția 2.3.3 și Teorema 2.3.2, cele trei norme de mai sus definesc topologia euclidiană a spațiului \mathbb{R}^2 .

Se poate demonstra că orice două norme pe \mathbb{R}^2 sunt echivalente (Teorema 2.3.7). Ca urmare, orice normă pe \mathbb{R}^2 generează topologia euclidiană a spațiului \mathbb{R}^2 .

Având în vedere Definițiile 2.1.1, 2.1.6, 2.1.8, 2.2.6 și 3.1.11, dăm următoarele exemple:

- mulțimi deschise: sfere deschise, $(a, b) \times (c, d)$, $(0, \infty) \times (0, \infty)$, $(0, \infty) \times (c, d)$, $(a, b) \times (0, \infty)$;
- mulțimi închise: orice sferă închisă, $[a, b] \times [c, d]$, $(-\infty, c] \times [d, \infty)$, orice dreaptă, orice segment închis $[AB]$;
- mulțimi compacte : orice sferă închisă, $[a, b] \times [c, d]$, $[1, 3] \times [2, 4] \cup [5, 7] \times [1, 2]$, orice poligon (plin sau gol);
- mulțimi necompacte: $(a, b] \times [c, d]$, $[d, \infty) \times [a, b]$;
- mulțimi conexe: orice sferă, orice poligon (plin);
- mulțimi neconexe: $(1, 3) \times [2, 4] \cup [5, 7] \times (1, 2)$; $\{(1, 2), (3, 1)\}$; $\{2\} \times [1, 3] \cup [4, 10] \times (0, 8)$;
- mulțimi compacte și conexe: orice sferă închisă, orice segment închis $[AB]$; $[a, b] \times [c, d]$;
- mulțimi compacte și neconexe: $([1, 3] \times [2, 4]) \cup ([5, 7] \times [1, 2])$; $(\{2\} \times [1, 3]) \cup ([4, 10] \times [0, 8])$;
- mulțimi necompacte și conexe: orice sferă deschisă; orice dreaptă; $(0, 3] \times [0, \infty)$; $(0, 3) \times (2, 5)$; $(0, 2) \times \{5\}$;
- mulțimi necompacte și neconexe: două drepte paralele; $(0, 2) \times \{5, 7\}$; $(2, 3) \times (5, 7] \cup \{(1, 1)\}$, $\mathbb{R} \times ([1, 2] \cup [5, 7])$;
- mulțimi mărginite: orice sferă, orice segment sau poligon;
- mulțimi nemărginite: orice semiplan; orice dreaptă; \mathbb{R}^2 ; $(0, \infty) \times (0, \infty)$; $[0, 3] \times [0, \infty)$;
- mulțimi convexe: orice sferă, orice poligon (plin) convex;
- mulțimi neconvexe: orice poligon (plin) concav, orice contur poligonal simplu, $\{(-1, -2), (3, 5), (2, 4)\}$, două drepte paralele. ■

Observație. Interpretarea geometrică a normelor echivalente: două norme sunt echivalente dacă și numai dacă în fiecare sferă corespunzătoare fiecăreia dintre norme se poate introduce o sferă de același centru și eventual altă rază corespunzătoare celeilalte norme.

Problema 2

Să se arate că în \mathbb{R}^2 avem

- 1). $\lim \left(\frac{2n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right) = (2,1)$;
- 2). $\lim \left(\frac{5n+2}{n}, \frac{n^2+n+1}{n^2+2} \right) = (5,1)$;
- 3). $\lim (n+1, 3^{-n})$ nu există;

Rezolvare. 1. Conform Propoziției 3.1.6, pentru a arăta că $\lim \left(\frac{2n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right) = (2,1)$, este necesar și suficient să arătăm că se verifică condiția

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon \implies \left\| \left(\frac{2n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right) - (2,1) \right\| < \varepsilon.$$

Alegem drept normă în \mathbb{R}^2 sup-norma. Ca urmare, avem

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{2n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right) - (2,1) \right\| &= \left\| \left(\frac{2n-1}{n+1} - 2, \frac{n+1}{n} - 1 \right) \right\| = \\ &= \left\| \left(\frac{-3}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \right\| = \max \left\{ \frac{3}{n+1}, \frac{1}{n} \right\} = \frac{3}{n+1}. \end{aligned}$$

Punem condiția $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$ și rezolvăm această inecuație cu necunoscuta $n \in \mathbb{N}$. Avem $\frac{3}{n+1} < \varepsilon \iff n+1 > \frac{3}{\varepsilon} \iff n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$.

Fie acum n_ε un număr natural mai mare decât $\frac{3}{\varepsilon} - 1$. De exemplu, folosind funcția parte întreagă, putem alege $n_\varepsilon = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 1 \right] + 1 = \left[\frac{3}{\varepsilon} \right]$. Ca urmare, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_\varepsilon$ avem $n \geq \left[\frac{3}{\varepsilon} \right] > \frac{3}{\varepsilon} - 1$ și ca urmare, $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$, adică $\left\| \left(\frac{2n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right) - (2,1) \right\| < \varepsilon$.

Așadar, condiția de mai sus se verifică, ceea ce arată că în \mathbb{R}^2 avem $\lim \left(\frac{2n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right) = (2,1)$.

2. Se poate proceda ca mai sus. Altfel, conform Teoremei 3.1.7, pentru a arăta că $\lim \left(\frac{5n+2}{n}, \frac{n^2+n+1}{n^2+2} \right) = (5,1)$, este necesar și suficient să arătăm că se verifică condițiile

$$\lim \frac{5n+2}{n} = 5, \lim \frac{n^2+n+1}{n^2+2} = 1.$$

Ori, aceste egalități sunt adevărate, conform regulilor uzuale de calcul a limitelor de șiruri de numere reale.

Așadar, în \mathbb{R}^2 avem $\lim \left(\frac{5n+2}{n}, \frac{n^2+n+1}{n^2+2} \right) = (5,1)$.

3. Raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că în \mathbb{R}^2 există limita $\lim (n+1, 3^{-n}) = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Conform Teoremei 3.1.7, vom avea $\lim (n+1) = \alpha \in \mathbb{R}$, ceea ce este contradictoriu. Această contradicție arată că presupunerea făcută este falsă. Așadar, limita $\lim (n+1, 3^{-n})$ nu există.

Observație. Dacă în rezolvarea punctului 1 se alege altă normă, se constată că condiția se verifică. Deosebirea care apare este aceea că rangul n_ε se modifică odată cu norma. Acest fapt nu este esențial în condiția menționată. Șirul dat este convergent la vectorul $(2,1)$ indiferent de norma considerată în \mathbb{R}^2 deoarece orice două norme pe \mathbb{R}^2 sunt echivalente (și deci generează aceeași topologie - topologia euclidiană a spațiului \mathbb{R}^2).

Problema 3

Să se determine punctele de acumulare pentru șirurile cu termenii generali

- 1). $x_n = (2 + (-1)^n, \sin \frac{2n\pi}{3})$;
- 2). $y_n = \left(n^{(-1)^n - 1}, 1 + 2(-1)^n, \frac{n}{n+1} \operatorname{tg} \frac{n\pi}{3} \right)$.

Rezolvare. 1. Prezența lui $(-1)^n$ în expresia lui x_n sugerează să considerăm pe n par și apoi impar. Pe de altă parte, funcția $f(n) = \sin \frac{2n\pi}{3}$ este periodică de perioadă principală $T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$.

Combinând, avem

$$\begin{aligned} x_{6k} &= \left(2 + (-1)^{6k}, \sin \frac{12k\pi}{3} \right) = (3, 0), \\ x_{6k+1} &= \left(2 + (-1)^{6k+1}, \sin \frac{(12k+2)\pi}{3} \right) = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ x_{6k+2} &= \left(2 + (-1)^{6k+2}, \sin \frac{(12k+4)\pi}{3} \right) = \left(3, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ x_{6k+3} &= \left(2 + (-1)^{6k+3}, \sin \frac{(12k+6)\pi}{3} \right) = (1, 0), \\ x_{6k+4} &= \left(2 + (-1)^{6k+4}, \sin \frac{(12k+8)\pi}{3} \right) = \left(3, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ x_{6k+5} &= \left(2 + (-1)^{6k+5}, \sin \frac{(12k+10)\pi}{3} \right) = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \end{aligned}$$

pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$. Se constată că șirul (x_n) este periodic de perioadă $T = 6$. De aici rezultă că șirul (x_n) are șase subșiruri constante, convergente la unul din vectorii

$$(3, 0), \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(3, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), (1, 0), \left(3, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Se mai constată că orice alt subșir al șirului (x_n) ori este convergent la unul din acești vectori, ori conține subșiruri convergente la unul din acești vectori.

Din toate acestea și din Propoziția 3.1.5, rezultă că mulțimea punctelor de acumulare a șirului (x_n) este formată din cei șase vectori de mai sus.

2. Procedând ca mai sus, avem, după ușoare calcule,

$$\begin{aligned} y_{6k} &= (1, 3, 0), y_{6k+1} = \left(\frac{1}{(6k+1)^2}, -1, \frac{6k+1}{6k+2} \sqrt{3} \right), \\ y_{6k+2} &= \left(1, 3, -\frac{6k+2}{6k+3} \sqrt{3} \right), y_{6k+3} = \left(\frac{1}{(6k+3)^2}, -1, 0 \right), \\ y_{6k+4} &= \left(1, 3, \frac{6k+4}{6k+5} \sqrt{3} \right), y_{6k+5} = \left(\frac{1}{(6k+5)^2}, -1, -\frac{6k+5}{6k+6} \sqrt{3} \right), \end{aligned}$$

pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$. De aici rezultă că șirul (x_n) are șase subșiruri convergente la unul din vectorii

$$(1, 3, 0), (0, -1, \pm\sqrt{3}), (1, 3, \pm\sqrt{3}), (0, -1, 0).$$

Se mai constată că orice alt subșir al șirului (x_n) ori este convergent la unul din acești vectori, ori conține subșiruri convergente la unul din acești vectori.

Din toate acestea și din Propoziția 3.1.5, rezultă că mulțimea punctelor de acumulare a șirului (x_n) este formată din cei șase vectori de mai sus.

Problema 4

Folosind Criteriul lui Cauchy, să se arate că șirul (x_n) de vectori din \mathbb{R}^2 cu termenul general

$$x_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k!}{k(k+1)}, \frac{(-1)^k}{k^2} \right)$$

este convergent.

Rezolvare. Criteriul lui Cauchy (vezi Teorema 3.1.6) spune că un șir de vectori din \mathbb{R}^2 este convergent dacă și numai dacă el este șir fundamental. Conform Definiției 3.1.7, șirul de vectori (x_n) este șir fundamental dacă verifică condiția

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq n_\varepsilon \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Alegem drept normă în \mathbb{R}^2 sup-norma. Ca urmare, pentru $n > m$ avem

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \left\| \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k!}{k(k+1)}, \frac{(-1)^k}{k^2} \right) - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\sin k!}{k(k+1)}, \frac{(-1)^k}{k^2} \right) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{\sin k!}{k(k+1)}, \frac{(-1)^k}{k^2} \right) \right\| = \\ &= \left\| \left(\sum_{k=m+1}^n \frac{\sin k!}{k(k+1)}, \sum_{k=m+1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \right) \right\| = \\ &= \max \left\{ \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{\sin k!}{k(k+1)} \right|, \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{(-1)^k}{k^2} \right| \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max \left\{ \sum_{k=m+1}^n \left| \frac{\sin k!}{k(k+1)} \right|, \sum_{k=m+1}^n \left| \frac{(-1)^k}{2^k} \right| \right\} \leq \\
&\leq \max \left\{ \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{2^k} \right\} = \\
&= \max \left\{ \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right), \frac{1}{2^m} (1 - 2^{m-n}) \right\} = \\
&\leq \max \left\{ \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n} \right), \frac{1}{2^m} (1 - 2^{m-n}) \right\} \leq \frac{1}{m+1}
\end{aligned}$$

Punem condiția $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$ și rezolvăm această inecuație cu necunoscuta $m \in \mathbb{N}$. Obținem $m > \frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Fie acum n_ε un număr natural mai mare decât $\frac{1}{\varepsilon} - 1$. De exemplu, putem alege $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$. Ca urmare, pentru fiecare $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m \geq n_\varepsilon$ avem $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ și ca urmare, $\frac{1}{m+1} < \varepsilon$, adică $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Așadar, șirul cu termenul general $x_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin k!}{k(k+1)}, \frac{(-1)^k}{k^2} \right)$ este șir fundamental și deci convergent în \mathbb{R}^2 .

Observație. Dacă se alege altă normă, se constată că condiția se verifică. Deosebirea care apare este aceea că rangul n_ε se modifică odată cu norma. Acest fapt nu este esențial în condiția menționată. Șirul dat este fundamental indiferent de norma considerată în \mathbb{R}^2 deoarece orice două norme pe \mathbb{R}^2 sunt echivalente (și deci generează aceeași topologie - topologia euclidiană a spațiului \mathbb{R}^2).

Problema 5

Să se arate că pe spațiul vectorial real \mathbb{R}^2 , aplicația

$$(x,y) \rightarrow \langle x,y \rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, este un produs scalar.

Să se precizeze norma indusă precum și topologia corespunzătoare.

Rezolvare. Verificăm că aplicația satisface axiomele produsului scalar (vezi Definiția 2.3.5):

1. Pentru orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, avem

$$\langle x,x \rangle = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 2x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.$$

Apoi, $\langle x,x \rangle = 0 \iff x_1 = 0, x_1 - x_2 = 0, x_2 = 0 \iff x = (0,0) = \theta$;

2. Pentru orice $x = (x_1, x_2)$ și $y = (y_1, y_2)$ din \mathbb{R}^2 , avem

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle = 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2;$$

3. Pentru orice $x = (x_1, x_2)$ și $y = (y_1, y_2)$ din \mathbb{R}^2 și $\alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ și ca urmare,

$$\begin{aligned} \langle \alpha x, y \rangle &= 3\alpha x_1y_1 - \alpha x_1y_2 - \alpha x_2y_1 + 2\alpha x_2y_2 = \\ &= \alpha(3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2) = \alpha \langle x, y \rangle; \end{aligned}$$

4. Pentru orice $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ și $z = (z_1, z_2)$ din \mathbb{R}^2 , avem $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ și ca urmare,

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= 3(x_1 + y_1)z_1 - (x_1 + y_1)z_2 - (x_2 + y_2)z_1 + \\ &+ 2(x_2 + y_2)z_2 = (3x_1z_1 - x_1z_2 - x_2z_1 + 2x_2z_2) + \\ &+ (3y_1z_1 - y_1z_2 - y_2z_1 + 2y_2z_2) = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle. \end{aligned}$$

Așadar, aplicația dată este un produs scalar pe \mathbb{R}^2 . Ca urmare,

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \| x \| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2}$$

este norma indusă de produsul scalar (Teorema 2.3.4, Remarca 2.3.3).

Conform cu Teorema 2.3.7, această normă este echivalentă cu norma euclidiană pe \mathbb{R}^2 . Ca urmare, norma de mai sus generează pe \mathbb{R}^2 topologia euclidiană.

Ca un amănunt, sfera $S(\theta, r)$ corespunzătoare este discul eliptic

$$3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 < r^2.$$

Adus la forma canonică, acesta este (vezi [D.A.2]) $\frac{X^2}{(\lambda r)^2} + \frac{Y^2}{(\mu r)^2} < 1$,

unde $\lambda = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$ și $\mu = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$. ■

Problema 6

Folosind definiția $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcții într-un punct, să se arate că

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3}} (3x + 2y - 5) = 7; \quad 2. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2 \\ z \rightarrow 3}} (2x + 3y - z) = 5;$$

$$3. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x - y}{x^2} = -\infty; \quad 4. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 3}} \frac{x - y}{(z - 3)^2} = -\infty;$$

$$5. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x + y}{(y - 1)^2} = \infty; \quad 6. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 3}} \frac{x + y}{(z - 3)^2} = \infty;$$

Rezolvare. Definiția $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcții reale de mai multe variabile reale într-un punct este Definiția 4.1.4.

1. Limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3}} (3x + 2y - 5) = 7$ se încadrează în cazul particular b)

al Definiției 4.1.4. Ca urmare, avem că $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3}} (3x + 2y - 5) = 7$ dacă și

numai dacă se verifică condiția

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y) \neq (2,3),$$

$$\begin{cases} |x-2| < \delta \\ |y-3| < \delta \end{cases} \implies |(3x+2y-5)-7| < \varepsilon.$$

Fie un $\delta > 0$ și fie un punct oarecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $(x,y) \neq (2,3)$ și $|x-2| < \delta$, $|y-3| < \delta$. Atunci, $|(3x+2y-5)-7| = |3(x-2)+2(y-3)| \leq 3|x-2|+2|y-3| < 5\delta$.

Pentru a se verifica condiția de mai sus, este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5}$ (sau, orice $\delta(\varepsilon) \in (0, \frac{\varepsilon}{5})$)

2. Limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3 \\ z \rightarrow 3}} (2x+3y-z) = 5$ se încadrează în cazul particular c)

al Definiției 4.1.4. Ca urmare, avem că $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3 \\ z \rightarrow 3}} (2x+3y-z) = 5$ dacă

și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) \neq (1,2,3),$$

$$\begin{cases} |x-1| < \delta \\ |y-2| < \delta \\ |z-3| < \delta \end{cases} \implies |(2x+3y-z)-5| < \varepsilon.$$

Fie un $\delta > 0$ și fie un punct oarecare $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $(x,y,z) \neq (1,2,3)$, $|x-1| < \delta$, $|y-2| < \delta$, $|z-3| < \delta$ Atunci,

$$|(2x+3y-z)-5| = |2(x-1)+3(y-2)-(z-3)| \leq 2|x-1|+3|y-2|+|z-3| < 2\delta+3\delta+\delta=6\delta.$$

Pentru a se verifica condiția de mai sus, este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{6}$ (sau, orice $\delta(\varepsilon) \in (0, \frac{\varepsilon}{6})$)

3. Limita infinită $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x-y}{x^2} = -\infty$ se încadrează în cazul similar al

Definiției 4.1.5. Ca urmare, avem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x-y}{x^2} = -\infty$ dacă și numai dacă se verifică condiția

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq 0, (x,y) \neq (0,1),$$

$$\begin{cases} |x| < \delta \\ |y-1| < \delta \end{cases} \implies \frac{x-y}{x^2} < -\varepsilon.$$

Fie un $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ și fie un punct oarecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $x \neq 0$, $(x,y) \neq (0,1)$ și $|x| < \delta$, $|y-1| < \delta$. Atunci, $x^2 < \delta^2$ și $0 < 1-\delta < y < 1+\delta$ și ca urmare, $\frac{x-y}{x^2} < \frac{2\delta-1}{\delta^2}$. Condiția $\frac{2\delta-1}{\delta^2} < -\varepsilon$ se verifică pentru orice $\delta \in \left(0, \frac{-1+\sqrt{1+4\delta^2}}{\delta^2}\right)$.

Pentru a se verifica condiția de mai sus, este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\right\}\right)$.

4. Se procedează exact asemănător ca mai sus. Limita infinită

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 3}} \frac{x-y}{(z-3)^2} = -\infty \text{ se încadrează în cazul similar al Definiției 4.1.5.}$$

Ca urmare, avem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 3}} \frac{x-y}{(z-3)^2} = -\infty$ dacă și numai dacă se verifică condiția

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 3, (x,y,z) \neq (0,1,3),$$

$$\begin{cases} |x| < \delta \\ |y-1| < \delta \\ |z-3| < \delta \end{cases} \implies \frac{x-y}{(z-3)^2} < -\varepsilon.$$

Fie un $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ și fie un punct oarecare $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $z \neq 3$, $(x,y,z) \neq (0,1,3)$ și $|x| < \delta$, $|y-1| < \delta$, $|z-3| < \delta$. Atunci, $(z-3)^2 < \delta^2$, $0 < 1 - \delta < y < 1 + \delta$ și ca urmare, $\frac{x-y}{x^2} < \frac{2\delta-1}{\delta^2}$. Condiția $\frac{2\delta-1}{\delta^2} < -\varepsilon$ se verifică pentru orice $\delta \in \left(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\right)$.

Pentru a se verifica condiția de mai sus, este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\right\}\right)$.

5. Limita infinită $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x+y}{(y-1)^2} = \infty$ se încadrează în Definiția 4.1.5.

Ca urmare, avem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x+y}{(y-1)^2} = \infty$ dacă și numai dacă se verifică

condiția

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 1, (x,y) \neq (0,1),$$

$$\begin{cases} |x| < \delta \\ |y-1| < \delta \end{cases} \implies \frac{x+y}{x^2} > \varepsilon.$$

Fie un $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ și fie un punct oarecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $y \neq 1$, $(x,y) \neq (0,1)$ și $|x| < \delta$, $|y-1| < \delta$. Atunci, $x^2 < \delta^2$ și $0 < 1 - \delta < y < 1 + \delta$ și ca urmare, $\frac{x+y}{x^2} > \frac{1-2\delta}{\delta^2}$. Condiția $\frac{1-2\delta}{\delta^2} > \varepsilon$ se verifică pentru orice $\delta \in \left(0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\right)$.

Pentru a se verifica condiția de mai sus, este suficient să luăm, pentru $\varepsilon > 0$ dat, $\delta(\varepsilon) \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2}}{\delta^2}\right\}\right)$.

6. Se procedează exact asemănător ca mai sus. ■

Observație. 1. Pentru o funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ (sau \mathbb{R}^3 sau, în general, \mathbb{R}^p), limita $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) = \ell$ prezintă 3 cazuri diferite,

după cum ℓ este finit sau $\pm\infty$. Acestea au fost ilustrate mai sus.

2. Din cele de mai sus se poate deduce următoarea schemă de aplicare a definiției $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcții într-un punct. Ne situăm în cazul ℓ finit. Pentru un $\delta > 0$ și $(x,y) \in D$ astfel încât $(x,y) \neq (a,b)$ și $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta$, în expresia $|f(x,y) - \ell|$ punem în evidență pe $|x - a|$ și $|y - b|$ și facem majorarea $|f(x,y) - \ell| \leq F(\delta)$. Punem condiția $F(\delta) < \varepsilon$ și rezolvăm această inecuație cu necunoscuta δ , obținând soluția $\delta < g(\varepsilon)$. Luând $\delta(\varepsilon)$ în intervalul $(0, g(\varepsilon))$, condiția din definiție se verifică și ca urmare am demonstrat că $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) = \ell$.

În cazul în care $\ell = \infty$, se procedează asemănător, cu modificarea că în expresia $f(x,y) - \ell$ punem în evidență pe $|x - a|$ și $|y - b|$ și facem minorarea $f(x,y) - \ell \geq F(\delta)$. Punem condiția $F(\delta) > \varepsilon$ și rezolvăm această inecuație cu necunoscuta δ , obținând soluția $\delta < g(\varepsilon)$. Luând $\delta(\varepsilon)$ în intervalul $(0, g(\varepsilon))$, condiția din definiție se verifică și ca urmare am demonstrat că $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) = \infty$.

În cazul în care $\ell = -\infty$, se procedează asemănător, cu modificarea că în expresia $f(x,y) - \ell$ punem în evidență pe $|x - a|$ și $|y - b|$ și facem majorarea $f(x,y) - \ell \leq F(\delta)$. Punem condiția $F(\delta) < -\varepsilon$ și rezolvăm această inecuație cu necunoscuta δ , obținând soluția $\delta < g(\varepsilon)$. Luând $\delta(\varepsilon)$ în intervalul $(0, g(\varepsilon))$, condiția din definiție se verifică și ca urmare am demonstrat că $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x,y) = \ell$.

Problema 7

Folosind Criteriul lui Heine, să se arate că

- $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ există; să se determine limita;
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ nu există.

Rezolvare. 1. Fie $((x_n, y_n))_n$ un șir oarecare de vectori din \mathbb{R}^2 , $(x_n, y_n) \neq (1,0) \forall n \in \mathbb{N}$ și astfel încât $\lim (x_n, y_n) = (1,0)$. Aceasta înseamnă că $\lim x_n = 1$ și $\lim y_n = 0$. Ca urmare, $\lim (x_n^2 + y_n^2) = 1$ și atunci, $\lim \sin \frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = \sin 1$. Conform Criteriului lui Heine

(Teorema 4.1.1), $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ există și este egală cu $\sin 1$.

2. Prin reducere la absurd. Presupunem că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ există. Fie

$\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ (care este finită, pentru că funcția $\sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ este

mărginită). Conform Criteriului lui Heine, ar trebui ca pentru orice șir $((x_n, y_n))_n$ de vectori din \mathbb{R}^2 , $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și astfel încât $\lim (x_n, y_n) = (0, 0)$ să avem $\lim \sin \frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = \ell$. Fie șirul de vectori din \mathbb{R}^2 cu termenul general $(x_n, y_n) = (\frac{1}{\sqrt{n\pi}}, 0)$. Se vede că $(x_n, y_n) \neq (0, 0) \forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim (x_n, y_n) = (0, 0)$ și, în plus, $\lim \sin \frac{1}{x_n^2 + y_n^2} = \lim \sin n\pi = 0$. Deci, $\ell = 0$. Fie acum șirul de vectori din \mathbb{R}^2 cu termenul general $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}}, 0)$. Se vede că $(x'_n, y'_n) \neq (0, 0) \forall n \in \mathbb{N}$ și $\lim (x'_n, y'_n) = (0, 0)$ și, în plus, $\lim \sin \frac{1}{(x'_n)^2 + (y'_n)^2} = \lim \sin (2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$. Deci, $\ell = 1$, ceea ce contrazice rezultatul obținut anterior.

Contradicția arată că limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ nu există. ■

Observație. Folosirea Criteriului lui Heine în probleme privind existența limitei unei funcții într-un punct se face după modelul următor: O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $D \subset \mathbb{R}^2$ (sau \mathbb{R}^3 sau, în general, \mathbb{R}^p) are limita ℓ în punctul $(a, b) \in D'$ dacă se verifică condiția: oricare ar fi șirul $((x_n, y_n))_n$ de elemente din D , diferite de (a, b) și astfel încât $\lim (x_n, y_n) = (a, b)$, avem $\ell = \lim f(x_n, y_n)$.

Folosirea Criteriului lui Heine în probleme privind inexistența limitei unei funcții într-un punct se face după modelul următor: O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nu are limită (nu are limita ℓ) în punctul $(a, b) \in D'$ dacă se verifică condiția: există un șir $((x_n, y_n))_n$ de elemente din D , diferite de (a, b) și cu limita (a, b) și astfel încât $\lim f(x_n, y_n)$ nu există (respectiv, nu are limita ℓ). Practic, se determină două șiruri $((x'_n, y'_n))_n$, $((x''_n, y''_n))_n$ din D , convergente la (a, b) astfel încât $\lim f(x'_n, y'_n)$ și $\lim f(x''_n, y''_n)$ sunt diferite între ele (respectiv, una dintre ele diferită de ℓ) (acum, șirul $((x_n, y_n))_n$ este șirul intercalat $(x'_1, y'_1), (x''_1, y''_1), (x'_2, y'_2), (x''_2, y''_2), \dots$).

Problema 8

1). Pentru funcția $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$, să se calculeze $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ și $\lim_{t \rightarrow \pi} f(t)$.

2). Pentru funcția

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x,y) = \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2}, x \sin \frac{xy}{x^2 + y^2} \right),$$

să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} f(x,y)$.

3). Pentru funcția

$$f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = \left(\frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^2 + y^2 + z^2}, e^z \right),$$

să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} f(x,y,z)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 0}} f(x,y,z)$.

Rezolvare. Conform Corolarului 4.1.1, limita unei funcții vectoriale se face pe componente. Așadar,

$$1. \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (\cos t, \sin t) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} \cos t, \lim_{t \rightarrow 0} \sin t \right) = (1,0),$$

$$\lim_{t \rightarrow \pi} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pi} (\cos t, \sin t) = \left(\lim_{t \rightarrow \pi} \cos t, \lim_{t \rightarrow \pi} \sin t \right) = (-1,0).$$

2. Avem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2}, x \sin \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = (0,0)$, pentru că

$$\left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| = |y| \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2} |y| \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \text{ și la fel,}$$

$$\left| x \sin \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| = |x| \left| \sin \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

La fel, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2}, x \sin \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \left(\frac{4}{5}, \sin \frac{2}{5} \right)$, pentru

că $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{4}{5}$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} x \sin \frac{xy}{x^2 + y^2} = \sin \frac{2}{5}$.

3. Avem $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} f(x,y,z) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \left(\frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^2 + y^2 + z^2}, e^z \right) = (0,1)$, pentru

$$\text{că } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)^2} \cdot \frac{(1 - \cos x)^2}{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{(2 \sin^2 \frac{x}{2})^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^4 \frac{x^4}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

și, evident, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} e^z = 1$.

S-au folosit limitele fundamentale $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$,

limita funcției compuse precum și faptul că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{x^4}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$,

pentru că $0 \leq \frac{x^4}{x^2 + y^2 + z^2} \leq x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \leq x^2 \xrightarrow{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} 0$. ■

Observație. În calculul limitelor funcțiilor de mai multe variabile, se folosesc, adaptate corespunzător, regulile de calcul a limitelor funcțiilor de o variabilă reală.

Problema 9

Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{y} \right), & x \neq 0 \text{ și } y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}$$

Să se determine mulțimea punctelor de continuitate ale funcției.

Rezolvare. Studiem continuitatea funcției f într-un punct $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Vom folosi Criteriul lui Heine (Teorema 4.2.1) privind continuitatea unei funcții într-un punct. Deosebim patru cazuri, după cum a și b sunt nule sau nenule.

Cazul $a \neq 0$ și $b \neq 0$. Atunci, $f(a,b) = (a+b) \left(\cos \frac{1}{a} + \sin \frac{1}{b} \right)$. Fie (x_n, y_n) un șir arbitrar din \mathbb{R}^2 , convergent la (a,b) . Fie $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ și sfera $S((a,b), r) = S$. Există rangul $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $(x_n, y_n) \in S$ pentru $n \geq n_0$. Pentru un astfel de n , avem

$$f(x_n, y_n) = (x_n + y_n) \left(\cos \frac{1}{x_n} + \sin \frac{1}{y_n} \right).$$

Ca urmare, $\lim f(x_n, y_n) = f(a,b)$. Acum, Criteriul amintit arată că funcția f este continuă în punctul (a,b) .

Cazul $a \neq 0$ și $b = 0$. Atunci, $f(a,b) = 0$. Fie șirul (y_n) , convergent la 0 , definit prin $y_n = \frac{1}{2n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}}$. Deoarece

$\lim f(a, y_{2n}) = a \left(\cos \frac{1}{a} + 1 \right)$ și $\lim f(a, y_{2n+1}) = a \left(\cos \frac{1}{a} - 1 \right)$, rezultă că $\lim f(x_n, y_n)$ nu există. Acum, Criteriul amintit arată că funcția f nu este continuă în punctul (a,b) .

Cazul $a = 0$ și $b \neq 0$ este similar cu cel anterior.

Cazul $a = 0$ și $b = 0$. Atunci, $f(a,b) = 0$. Fie (x_n, y_n) un șir arbitrar din \mathbb{R}^2 , convergent la $(0,0)$. Avem

$$f(x_n, y_n) = \begin{cases} (x_n + y_n) \left(\cos \frac{1}{x_n} + \sin \frac{1}{y_n} \right), & x_n \neq 0, y_n \neq 0 \\ 0, & x_n = 0 \text{ sau } y_n = 0 \end{cases}$$

Se constată cu ușurință că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea $|f(x_n, y_n) - 0| \leq 2|x_n + y_n|$. De aici rezultă imediat că $\lim f(x_n, y_n) = 0 = f(a,b)$. Criteriul amintit arată că funcția f este continuă în (a,b) .

În concluzie, mulțimea punctelor de continuitate ale funcției f este

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \neq 0\} \cup \{(0,y) \mid y \neq 0\}. \blacksquare$$

Observație. Criteriul lui Heine și diverse variante ale lui sunt des utilizate în probleme privind continuitatea unei funcții într-un punct. Este indicat a fi folosit în probleme privind discontinuitatea unei funcții într-un punct, după modelul următor:

O funcție $f : D \rightarrow Y$ este discontinuă într-un punct $a \in D$ dacă se verifică condiția: există un șir (x_n) din D , convergent la a și astfel încât $\lim f(x_n)$ ori nu există ori, dacă există, este diferită de $f(a)$.

Practic, se determină două șiruri (x'_n) (x''_n) din D , convergente la a astfel încât $\lim f(x'_n)$ și $\lim f(x''_n)$ sunt diferite ori între ele, ori de $f(a)$. (acum, șirul (x_n) este șirul intercalat $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots$).

Stabilirea continuității unei funcții într-un punct se poate face și cu definiția (în diversele ei variante – cu vecinătăți sau $\varepsilon - \delta$) sau folosind proprietățile funcțiilor continue.

Astfel, continuitatea funcției f în $(0,0)$ înseamnă verificarea condiției din Definiția 4.2.5:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{l} |x| < \delta \\ |y| < \delta \end{array} \right\} \implies |f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$$

Pentru aceasta, fie un $\delta > 0$ și fie un punct oarecare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ astfel încât $|x| < \delta$ și $|y| < \delta$. Atunci,

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq 2|x + y| \leq 2(|x| + |y|) < 4\delta.$$

De aici se vede că condiția din Definiția 4.2.5 se verifică dacă pentru $\varepsilon > 0$ dat se ia $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

În sfârșit, în cazul $a \neq 0$ și $b \neq 0$, pentru a arăta că funcția f este continuă în punctul (a,b) , procedăm astfel: pe vecinătatea S a punctului (a,b) , funcția f este definită prin

$$f(x,y) = (x + y) \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{y} \right).$$

Astfel, f apare ca un produs de două funcții continue: o funcție polinomială și o funcție sumă de funcții trigonometrice compuse cu funcții raționale. Cum produsul a două funcții continue este o funcție continuă, funcția f este continuă pe S și cu atât mai mult în (a,b) .

Problema 10

Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{x^2} e^{-\frac{|y|}{x^2}}, & \text{dacă } x \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{dacă } x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

i). Să se studieze continuitatea parțială;

- ii). Să se studieze continuitatea după o direcție în origine;
- iii). Dacă $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, să se studieze continuitatea relativ la mulțimea A în origine.
- iv). Să se studieze continuitatea funcției.
- v). Se poate prelungi f prin continuitate în origine?
- vi). Să se studieze continuitatea uniformă a funcției.
- vii). Să se studieze existența limitelor iterate ale funcției într-un punct (a,b) .

Rezolvare. i). Conform cu Definiția 4.2.11, funcția f este continuă parțial în raport cu variabila x (sau y) în punctul (a,b) dacă f este continuă după direcția axei Ox (respectiv Oy) în punctul (a,b) . Având în vedere Definițiile 4.2.8 și 4.2.10, fie Δ_1 (respectiv Δ_2) dreapta ce trece prin (a,b) și este paralelă cu Ox (respectiv Oy). Ecuația ei este $y = b$ (respectiv $x = a$). Restricția funcției f la dreapta

$$\Delta_1 \text{ este } f_{\Delta_1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_{\Delta_1}(x) = \begin{cases} \frac{|b|}{x^2} e^{-\frac{|b|}{x^2}}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

iar restricția la dreapta Δ_2 este $f_{\Delta_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_{\Delta_2}(y) = 0$ când $a = 0$ și $f_{\Delta_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_{\Delta_2}(y) = \frac{|y|}{a^2} e^{-\frac{|y|}{a^2}}$ când $a \neq 0$.

Din $\lim_{x \rightarrow a} f_{\Delta_1}(x) = f_{\Delta_1}(a)$ pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$, rezultă că funcția f este continuă parțial în raport cu variabila x în punctul (a,b) .

Pentru $a = 0$, avem $\lim_{y \rightarrow b} f_{\Delta_2}(y) = f_{\Delta_2}(b) = 0$, pentru fiecare $b \in \mathbb{R}$; rezultă că funcția f este continuă parțial în raport cu variabila y în punctul $(0,b)$.

Pentru $a \neq 0$, avem $\lim_{y \rightarrow b} f_{\Delta_2}(y) = f_{\Delta_2}(b)$, pentru fiecare $b \in \mathbb{R}$; rezultă că funcția f este continuă parțial în raport cu variabila y în (a,b) .

Așadar, funcția f este continuă parțial în raport cu variabila y în punctul (a,b) .

Concluzia este că funcția f este continuă parțial în fiecare punct (a,b) din \mathbb{R}^2 .

ii). Avem în vedere Definiția 4.2.10 privind continuitatea după o direcție în origine. Din cele spuse mai sus, funcția f este continuă după direcția axelor Ox și Oy în origine. Fie acum $\Delta : y = mx, m \neq 0$, o dreaptă oarecare care trece prin origine, diferită de axele de coordonate. Restricția funcției f la dreapta Δ este

$$f_{\Delta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_{\Delta}(x) = \begin{cases} \frac{|m|}{|x|} e^{-\frac{|m|}{|x|}}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

Acum, avem $\lim_{x \rightarrow 0} f_{\Delta}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0 = f_{\Delta}(0)$, adică restricția funcției f la dreapta Δ este continuă în 0 . Conform cu Definiția 4.2.10, funcția f este continuă după orice direcție în origine.

iii). Avem în vedere Definiția 4.2.8 privind continuitatea relativ la o mulțime a unei funcții. Restricția funcției f la mulțimea A este

$$f_A : A \rightarrow \mathbb{R}, f_A(x,y) = \begin{cases} e^{-1}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Este clar că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f_A(x,y) = e^{-1}$, ceea ce arată că restricția funcției f

la A nu este continuă în $(0,0)$.

Concluzia este că funcția f nu este continuă relativ la mulțimea A în origine.

iv). Din cele spuse imediat deasupra, rezultă că funcția f nu este continuă în $(0,0)$ (vezi Remarca 4.2.4). De altfel, din $\lim f(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}) = e^{-1}$ și Criteriul lui Heine (Teorema 4.2.1), avem aceeași concluzie.

Fie acum un punct $(0,b)$ din \mathbb{R}^2 , $b \neq 0$. Fie (x_n, y_n) un șir de puncte din \mathbb{R}^2 , convergent la $(0,b)$. Aceasta înseamnă, conform Teoremei 3.1.7, că $\lim x_n = 0$ și $\lim y_n = b$. De aici, $\lim \frac{|y_n|}{x_n^2} = \infty$ și, ținând cont încă o dată că $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$, avem $\lim f(x_n, y_n) = 0 = f(0,b)$.

Așadar, funcția f este continuă în punctul $(0,b)$ din \mathbb{R}^2 , $b \neq 0$.

Fie acum un punct (a,b) din \mathbb{R}^2 , $a \neq 0$. Pe o vecinătate sferică a acestui punct, cu raza suficient de mică, funcția f este o compunere de funcții continue: funcția $u(x,y) = \frac{|y|}{x^2}$ și funcția $v(t) = te^{-t}$. Ca urmare, f este continuă pe întreaga această vecinătate.

Concluzia este că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

v). Având în vedere cele spuse mai sus la pc. ii) și iii) și ținând cont de Propozițiile 4.1.1 și 4.1.2, rezultă că funcția f nu are limită în origine. Ca urmare, (vezi Definiția 4.2.7), funcția f nu se poate prelunge prin continuitate în origine.

vi). Am tras mai sus concluzia că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Conform cu Teorema lui Cantor (Teorema 4.2.10), funcția f este continuă uniform pe orice mulțime compactă din $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mai mult, se poate arăta că funcția f este continuă uniform pe orice mulțime mărginită din $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Arătăm că funcția f este continuă uniform pe $\mathbb{R}^2 \setminus [-r,r] \times [-r,r]$, pentru fiecare $r > 0$.

(Schiță). Prin calcul direct, se constată că funcția f este derivabilă

parțial pe $[0, \infty) \times [0, \infty) \setminus \{(0,0)\}$ și (vezi Remarca 5.1.1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -\frac{2y}{x^3}e^{-\frac{|y|}{x^2}} + \frac{y}{x^2} \frac{2y}{x^3}e^{-\frac{y}{x^2}}, & x \neq 0, y \geq 0 \\ 0, & x = 0, y > 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{|y|}{x^2}} - \frac{y}{x^4}e^{-\frac{y}{x^2}}, & x \neq 0, y \geq 0 \\ 0, & x = 0, y > 0 \end{cases}.$$

Având în vedere inegalitatea $t^k e^{-t} \leq M = \text{const.}$ pentru $t \geq 0$ și $k = 1, 2$, se constată că aceste derivate parțiale sunt mărginite pe fiecare din mulțimile $[r, \infty) \times [r, \infty)$, $[0, r] \times [r, \infty)$, $[r, \infty) \times [0, r]$.

Folosind acest rezultat și Teorema lui Lagrange privind funcțiile reale derivabile (vezi și Remarca 5.4.3), se constată că funcția f este lipshitziană pe fiecare din aceste mulțimi. Ca urmare (vezi Propoziția 4.2.2), funcția f este continuă uniform pe fiecare din aceste mulțimi și deci și pe reuniunea lor. Din simetria funcției față de axele de coordonate, la fel este funcția și pe celelalte cadrane. Din toate acestea, avem că funcția f este continuă uniform pe $\mathbb{R}^2 \setminus [-r, r] \times [-r, r]$, pentru fiecare $r > 0$.

vii). Avem în vedere Definiția 4.1.13 privind limitele iterate ale unei funcții într-un punct și obținem:

– limita parțială în raport cu x a funcției f în punctul (a,b) este

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) = \begin{cases} \frac{|y|}{a^2}e^{-\frac{|y|}{a^2}}, & \text{dacă } a \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } a = 0 \end{cases} = f(a,y), y \in \mathbb{R},$$

– limita parțială în raport cu y a funcției f în punctul (a,b) este

$$\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) = \begin{cases} \frac{|b|}{x^2}e^{-\frac{|b|}{x^2}}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases} = f(x,b), x \in \mathbb{R}.$$

De aici,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right) = \begin{cases} \frac{|b|}{a^2}e^{-\frac{|b|}{a^2}}, & \text{dacă } a \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } a = 0 \end{cases} = f(a,b),$$

$$\lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right) = \begin{cases} \frac{|b|}{a^2}e^{-\frac{|b|}{a^2}}, & \text{dacă } a \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } a = 0 \end{cases} = f(a,b),$$

ceea ce arată că f are limite iterate în fiecare punct (a,b) din \mathbb{R}^2 . ■

Observație. Funcția f este un exemplu de funcție care are limite iterate în origine, este continuă parțial în origine dar nu este continuă în origine (nu are nici măcar limită în origine).

Observație. Mai trebuie demonstrat că dacă f este continuă uniform pe două mulțimi, atunci ea este continuă uniform și pe reuniunea lor.

Problema 11

Dat fiind $\varepsilon > 0$, să se determine un $\delta(\varepsilon) > 0$ satisfăcând condiția de continuitate uniformă pentru funcția

$$f : (0,1) \times \mathbb{R} \times (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = (e^x \cos y, ze^{\sin y}).$$

Rezolvare. Avem în vedere Definiția 4.2.14, adaptată tipului de funcție din enunț. În Definiție, considerăm d_1 și d_2 ca fiind metricile induse de sup-norme pe spațiile \mathbb{R}^3 și respectiv \mathbb{R}^2 . Așadar, funcția f este continuă uniform pe mulțimea $D = (0,1) \times \mathbb{R} \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^3$ dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, pentru orice (x_1, y_1, z_1) și $(x_2, y_2, z_2) \in D$ cu $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$, $|y_1 - y_2| < \delta(\varepsilon)$, $|z_1 - z_2| < \delta(\varepsilon)$, să avem

$$|e^{x_1} \cos y_1 - e^{x_2} \cos y_2| < \varepsilon, |z_1 e^{\sin y_1} - z_2 e^{\sin y_2}| < \varepsilon.$$

Fie $f_1(x,y,z) = e^x \cos y$ prima funcție componentă a lui f . Având în vedere Formula lui Lagrange pentru funcții de mai multe variabile reale (vezi Remarca 5.4.3), pentru (x,y,z) și (a,b,c) din D , avem

$$f_1(x,y,z) - f_1(a,b,c) = e^\xi \cos \eta (x - a) - e^\xi \sin \eta (y - b),$$

cu $\xi \in \overline{a,x}$ și $\eta \in \overline{b,y}$.

Analog, pentru $f_2(x,y,z) = ze^{\sin y}$, a doua funcție componentă a lui f , avem

$$f_2(x,y,z) - f_2(a,b,c) = \beta \cos \alpha e^{\sin \alpha} (y - b) + e^{\sin \alpha} (z - c),$$

cu $\alpha \in \overline{b,y}$ și $\beta \in \overline{c,z}$.

Observând acum că cele patru derivate parțiale de mai sus sunt mărginite în modul pe D de numărul $M = e$, avem

$$\begin{aligned} |e^{x_1} \cos y_1 - e^{x_2} \cos y_2| &\leq M(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|) \\ |z_1 e^{\sin y_1} - z_2 e^{\sin y_2}| &\leq M(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|). \end{aligned}$$

Se vede de aici că dacă se alege $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2e}$, atunci condiția de continuitate uniformă pentru funcția f pe domeniul său de definiție D se verifică. ■

Observație. În fapt, s-a arătat că fiecare funcție componentă a lui f este continuă uniform pe mulțimea D , iar $\delta(\varepsilon)$ cerut este minimumul dintre cei doi $\delta(\varepsilon)$, cei corespunzători celor două componente ale funcției.

În general, o funcție $f = (f_1, f_2, \dots, f_q) : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este continuă uniform pe mulțimea D dacă și numai dacă fiecare componentă f_1, f_2, \dots, f_q este continuă uniform pe D .

Observație. Teorema lui Cantor (Teorema 4.2.10) arată că într-o situație specială pentru domeniul de definiție D , o funcție continuă $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ poate fi chiar continuă uniform pe D .

Alte situații speciale sunt prezentate mai jos:

a). Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval necompact. O funcție continuă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ care are limite finite în capetele intervalului I este continuă uniform.

b). Orice funcție continuă $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ care este periodică în raport cu fiecare variabilă, este continuă uniform pe \mathbb{R}^p .

Observație. Se poate demonstra că funcția f este continuă uniform pe mulțimea D și altfel:

Varianta 1. Fie mai întâi f_0 restricția funcției f la mulțimea $(0,1) \times [0,2\pi] \times (-1,1)$ și apoi f_1 prelungirea prin continuitate a lui f_0 pe mulțimea $\Omega = [0,1] \times [0,2\pi] \times [-1,1]$. În sfârșit, fie f_2 prelungirea prin 2π -periodicitate în raport cu variabila y a lui f_1 la mulțimea $\bar{D} = [0,1] \times \mathbb{R} \times [-1,1]$. Deoarece mulțimea Ω este compactă, conform Teoremei lui Cantor (Teorema 4.2.10), funcția continuă f_1 este continuă uniform pe mulțimea Ω . Având în vedere cele de mai sus, funcția f_2 este continuă uniform pe mulțimea \bar{D} . Ca urmare, restricția sa la D , adică funcția f , are aceeași proprietate.

Varianta 2. (Schită). Funcția exponențială și funcția de gradul întâi ce apar în expresia lui f sunt continue uniform pe intervalele deschise corespunzătoare pentru că se pot prelunge prin continuitate pe intervalele compacte corespunzătoare. Celelalte două funcții sunt continue uniform pe \mathbb{R} deoarece sunt continue și 2π -periodice pe \mathbb{R} . Mai folosim proprietatea că produsul a două funcții continue uniform și mărginite este o funcție continuă uniform pe mulțimea respectivă. Ca urmare, componentele lui f , deci și f , sunt funcții continue uniform pe D .

Problema 12

Pentru funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{xy}{x^2+y^2} \right), & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

să se determine mulțimea punctelor de continuitate C , mulțimea punctelor de derivabilitate parțială D precum și mulțimea punctelor de diferențiabilitate E .

Rezolvare. a). Studiem continuitatea funcției. Fie $(a,b) \neq (0,0)$ un punct din \mathbb{R}^2 . Pe o vecinătate sferică S de rază $r < \sqrt{a^2 + b^2}$

a acestui punct, cele două componente ale funcției, $f_1(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ și $f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, sunt funcții continue, fiind compuneri de astfel de funcții: funcții polinomiale, funcția rațională $\frac{u}{v}$, funcția radical. Ca urmare, funcția f este continuă pe S . Studiem acum continuitatea funcției în origine. Pentru prima componentă, avem

$$0 \leq \left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \max\{|y^2|, |xy|\} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}]{} 0$$

ceea ce arată că f_1 este continuă în $(0,0)$.

Pentru a doua componentă, avem că $\lim_{x \rightarrow 0} f_2\left(\frac{1}{n}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$ nu există, ceea ce arată că f_2 nu este continuă în $(0,0)$ (de fapt, nu are nici măcar limită în acest punct).

În concluzie, mulțimea punctelor de continuitate a funcției f este $C = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b). Studiem derivabilitatea parțială a funcției. Fie $(a,b) \neq (0,0)$ un punct din \mathbb{R}^2 . Pe o vecinătate sferică S de rază $r < \sqrt{a^2+b^2}$ a acestui punct, cele două componente ale funcției, $f_1(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ și $f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, sunt funcții derivabile parțial (vezi Definiția 5.1.2), fiind compuneri de astfel de funcții: funcții polinomiale, funcția rațională $\frac{u}{v}$, funcția radical. Ca urmare, funcția f este derivabilă parțial pe S (vezi Definiția 5.1.5). Având în vedere regulile de derivare parțială (vezi Remarca 5.1.2), avem derivatele parțiale în raport cu variabilele x și y ale funcțiilor f_1 și f_2 pe mulțimea $D_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{y^2\sqrt{x^2+y^2} - xy^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{2xy\sqrt{x^2+y^2} - xy^2 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{xy(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} &= \frac{x(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Având în vedere Definițiile 5.1.4 și 5.1.5, avem, pe D_0 ,

– derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{y^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \right);$$

– derivata parțială a funcției f în raport cu variabila y ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right);$$

– derivata funcției f (sau matricea lui Jacobi a funcției f),

$$f'(x,y) = \left(\begin{array}{cc} \frac{y^4}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{xy(2x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{array} \right).$$

Studiem acum derivabilitatea parțială a funcției în origine. Începem cu componentele funcției. Urmând Definiția 5.1.1 și Remarca 5.1.1,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x,0) - f_1(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_1(0,y) - f_1(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x,0) - f_2(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_2(0,y) - f_2(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Având în vedere Definițiile 5.1.4 și 5.1.5, funcția f este derivabilă parțial în origine și derivata ei în acest punct este $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

În concluzie, mulțimea punctelor de derivabilitate parțială a funcției f este $D = \mathbb{R}^2$.

c). Studiem diferențiabilitatea funcției. Deoarece funcția nu este continuă în origine, ea nu este diferențiabilă în acest punct, conform Teoremei 5.1.1. Fie acum $(a,b) \neq (0,0)$ un punct din \mathbb{R}^2 . Pe o vecinătate sferică S de rază $r < \sqrt{a^2 + b^2}$ a acestui punct, derivata parțială $f'(x,y)$ este continuă pe S deoarece cele patru derivate parțiale $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ sunt continue pe S , fiind compuneri de astfel de funcții (vezi Corolarul 4.2.1). Ca urmare, conform cu condiția suficientă de diferențiabilitate din Teorema 5.1.3, funcția f este diferențiabilă pe S și deci pe D_0 .

În concluzie, mulțimea punctelor de diferențiabilitate a funcției f este $E = D_0$. ■

Observație. De reținut:

- continuitatea este o condiție necesară pentru diferențiabilitatea unei funcții într-un punct;
- derivabilitatea parțială este o condiție necesară pentru diferențiabilitatea unei funcții într-un punct;

Sensul exact al acestor afirmații trebuie înțeles ca în Teoremele 5.1.1 și 5.1.2.

Observație. Conform cu Definiția 5.1.7, Propoziția 5.1.5 și Teorema 5.1.2, diferențiala funcției f într-un punct $(a,b) \in E$ este aplicația liniară $df(a,b) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a cărei matrice în baza canonică a lui \mathbb{R}^2 este $f'(a,b)$.

Așadar, $df(a,b) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ este definită prin

$$df(a,b)(u,v) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b)u + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)v, \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b)u + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b)v \right)$$

pentru fiecare $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

În funcție de diferențialele elementare dx , dy , se poate scrie

$$df(a,b) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b)dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)dy, \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b)dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b)dy \right).$$

Reamintim că, de fapt, diferențialele elementare dx , dy sunt diferențialele funcțiilor proiecție $dx = dpr_1$ și $dy = dpr_2$ și coincid cu acestea (vezi Remarca 5.1.9):

$$dx : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, dx(u,v) = u \text{ și } dy : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, dy(u,v) = v.$$

Concret, în punctul $(3,4)$ avem că $df(3,4) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ este

$$df(3,4) = \left(\frac{256}{125}dx + \frac{408}{125}dy, \frac{28}{625}dx - \frac{21}{625}dy \right).$$

Problema 13

Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferențiabilă pe \mathbb{R}^2 . Să se arate apoi că funcția f admite derivate parțiale mixte de ordinul doi pe \mathbb{R}^2 și să se deducă faptul că cel puțin una dintre aceste derivate nu este continuă în origine. În ce puncte din \mathbb{R}^2 funcția f este diferențiabilă de două ori?

Rezolvare. a). Începem prin a studia diferențiabilitatea funcției în origine. Din

$$0 \leq \left| xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| = |xy| \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |xy| \xrightarrow[x \rightarrow 0]{y \rightarrow 0} 0,$$

rezultă că funcția este continuă în origine.

Urmând din nou Definiția 5.1.1 și Remarca 5.1.1, avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0,$$

ceea ce arată că funcția f este derivabilă parțial în origine.

Așadar, cele două condiții necesare de diferențiabilitate a unei funcții într-un punct (vezi Teoremele 5.1.1 și 5.1.2) sunt îndeplinite. Considerând acum aplicația liniară nulă $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $L(x,y) = 0$, avem

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y) - f(0,0) - L(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

pentru că

$$0 \leq \left| xy \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)} \right| \leq \max\{|x|, |y|\}.$$

Conform Definiției 5.1.6, f este diferențiabilă în origine.

Studiem acum diferențiabilitatea funcției într-un punct (a,b) diferit de origine. Pe o vecinătate sferică S de rază $r < \sqrt{a^2 + b^2}$ a acestui punct, funcția f este o funcție rațională și ca urmare, este derivabilă parțial pe S (vezi Definiția 5.1.1). Având în vedere regulile de derivare parțială (Remarca 5.1.2) și cele spuse mai sus, avem derivatele parțiale în raport cu x și y ale funcției f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Deoarece aceste derivate parțiale sunt funcții raționale pe S , ele sunt funcții continue pe S . Conform unei condiții suficiente de diferențiabilitate (Teorema 5.1.3), funcția f este diferențiabilă pe S și deci pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Mai facem observația că pentru $(x,y) \neq (0,0)$ avem

$$0 \leq \left| \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq 3|y| \xrightarrow[x \rightarrow 0]{y \rightarrow 0} 0, \quad 0 \leq \left| \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right| \leq 3|x| \xrightarrow[x \rightarrow 0]{y \rightarrow 0} 0,$$

ceea ce arată că derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe \mathbb{R}^2 .

Tragem concluzia că funcția f este diferențiabilă pe \mathbb{R}^2 și chiar mai mult, este de clasă C^1 pe \mathbb{R}^2 (vezi Definiția 5.1.9 și Propoziția 5.1.6).

b). Începem prin a studia existența derivatelor parțiale mixte de ordinul doi ale funcției f în origine. Conform cu Definiția 5.2.1, avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1$$

ceea ce arată că f are derivate parțiale mixte de ordinul doi în $(0,0)$.

Studiem acum existența derivatelor parțiale mixte de ordinul doi ale funcției f într-un punct $(a,b) \neq (0,0)$. Pe o vecinătate sferică S de rază

$r < \sqrt{a^2 + b^2}$ a acestui punct, derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt funcții

raționale și ca urmare, sunt derivabile parțial pe S (vezi Definiția 5.1.1). Ca urmare, funcția f admite derivate parțiale mixte de ordinul doi pe \mathbb{R}^2 . Dacă amândouă derivatele parțiale mixte de ordinul doi

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ar fi continue în origine, atunci, conform cu Teorema lui Schwarz (Teorema 5.2.1), derivatele parțiale mixte de ordinul doi

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ar fi egale în origine, ceea ce contrazice rezultatele de mai sus. Așadar, cel puțin una dintre derivatele parțiale mixte de

ordinul doi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu este continuă în origine. De altfel, calcule simple ne conduc la

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}$$

pentru $(x, y) \neq (0, 0)$, fapt normal, pentru că funcția f este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (vezi Definiția 5.2.9 și Corolarul 5.2.1). Acum, din $\lim \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\frac{1}{n}, 0) = 1$ și $\lim \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, \frac{1}{n}) = -1$, rezultă că nici una din derivatele parțiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nu este continuă în origine.

c). Deoarece funcția f este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, din Definiția 5.2.11 și din Teorema 5.2.2 a lui Young rezultă că ea este de două ori diferentiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. ■

Observație. Conform cu Definiția 5.2.12, diferențiala de ordin doi a funcției f în punctul $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ este aplicația $d^2 f(a, b) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$d^2 f(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) dy^2.$$

Problema 14

Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de clasă C^2 și fie funcția compusă

$$F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi).$$

Să se arate că F este de clasă C^2 și verifică identitatea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi}.$$

(expresia laplaceianului în coordonate sferice (polare în spațiu)).

Rezolvare. Notăm variabilele funcției f prin x, y, z . Considerăm funcțiile $x, y, z : D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $x(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos \theta \sin \varphi$, $y(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos \varphi$. Mai considerăm funcția vectorială u care are drept componente aceste trei funcții: $u : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $u = (x, y, z)$. Funcția u este de clasă C^2 pe mulțimea D pentru că componentele ei, funcțiile x, y, z , au derivate parțiale de ordinul întâi și doi continue pe D . Cum și funcția f este de clasă C^2 pe mulțimea \mathbb{R}^3 , rezultă, conform Teoremei de diferențiabilitate a funcțiilor compuse (Teorema 5.3.2), că funcția compusă $f \circ u = F$ este de clasă C^2 pe mulțimea D . Tot Teorema amintită ne dă și formulele de calcul pentru derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției compuse F . Precizăm că formulele de calcul pentru derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției compuse F sunt date de Teorema 5.3.1. Așadar, avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \frac{\partial z}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi).\end{aligned}$$

Calculăm derivatele parțiale ale funcțiilor x, y, z:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) &= \cos \theta \sin \varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) &= \sin \theta \sin \varphi, \\ \frac{\partial z}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) &= \cos \varphi.\end{aligned}$$

Facem următoarea precizare: de obicei, în formulele anterioare, nu se scriu punctele în care se calculează derivatele, pentru a nu se supraîncărca scrierea. Însă, ele trebuie să fie prezente tacit. Cu aceasta, formula de mai sus se scrie

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho},$$

și ca urmare,

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \varphi,$$

adică mult mai convenabil.

În mod asemănător, avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Calculăm celelalte derivate parțiale ale funcțiilor x, y, z

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \theta} &= -\rho \sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= \rho \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi,\end{aligned}$$

și cu acestea,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \theta} &= -\frac{\partial f}{\partial x} \rho \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ \frac{\partial F}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f}{\partial x} \rho \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \rho \sin \theta \cos \varphi - \frac{\partial f}{\partial z} \rho \sin \varphi.\end{aligned}$$

Trecem acum la calculul derivatelor parțiale de ordinul doi ale funcției compuse F. Aplicând regulile de derivare a sumei și a produsului precum și a unei funcții compuse, avem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial F}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \varphi \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \cos \varphi = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \cos \varphi \right) \cos \theta \sin \varphi + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \cos \varphi \right) \sin \theta \sin \varphi + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cos \varphi \right) \cos \varphi.\end{aligned}$$

În mod asemănător, avem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \rho \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \rho \cos \theta \sin \varphi \right) = \\
&= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \rho \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \rho \cos \theta \sin \varphi - \\
&- \frac{\partial f}{\partial x} \rho \cos \theta \sin \varphi - \frac{\partial f}{\partial y} \rho \sin \theta \sin \varphi = \\
&= -\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rho \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \rho \cos \theta \sin \varphi \right) \rho \sin \theta \sin \varphi + \\
&+ \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \rho \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \rho \cos \theta \sin \varphi \right) \rho \cos \theta \sin \varphi - \\
&- \frac{\partial f}{\partial x} \rho \cos \theta \sin \varphi - \frac{\partial f}{\partial y} \rho \sin \theta \sin \varphi
\end{aligned}$$

și, în sfârșit,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \rho \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \rho \sin \theta \cos \varphi - \frac{\partial f}{\partial z} \rho \sin \varphi \right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \rho \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \rho \sin \theta \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \rho \sin \varphi - \\
&- \frac{\partial f}{\partial x} \rho \cos \theta \sin \varphi - \frac{\partial f}{\partial y} \rho \sin \theta \sin \varphi - \frac{\partial f}{\partial z} \rho \cos \varphi = \\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rho \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \rho \sin \theta \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \rho \sin \varphi \right) \rho \cos \theta \cos \varphi + \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \rho \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \rho \sin \theta \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \rho \sin \varphi \right) \rho \sin \theta \cos \varphi - \\
&- \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \rho \cos \theta \cos \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \rho \sin \theta \cos \varphi - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \rho \sin \varphi \right) \rho \sin \varphi - \\
&- \frac{\partial f}{\partial x} \rho \cos \theta \sin \varphi - \frac{\partial f}{\partial y} \rho \sin \theta \sin \varphi - \frac{\partial f}{\partial z} \rho \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Introducând derivatele $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$, $\frac{\partial F}{\partial \rho}$, $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ în membrul drept al identității din enunț, se constată că acesta este egal cu membrul stâng $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ al identității.

Identitatea din enunț este demonstrată. ■

Observație. Formulele care dau derivatele parțiale ale funcției compuse $F = f \circ u$ în funcție de derivatele parțiale ale funcțiilor ce se compun provin din egalitatea matriceală $F'(a) = f'(u(a)) \cdot u'(a)$ (Teorema 5.3.1 de diferențiabilitate a funcțiilor compuse). În cazul funcțiilor din Problema, această egalitate devine

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial F}{\partial \rho}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aici, derivatele lui F sunt calculate în punctul $a = (\rho, \theta, \varphi)$ iar derivatele lui f sunt calculate în punctul

$$u(a) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi).$$

Precizăm încă odată că, de obicei, în formulele anterioare, nu se scriu punctele în care se calculează derivatele, pentru a nu se supraîncărca

scrierea. Însă, ele trebuie să fie prezente tacit.

În sfârșit, se observă faptul că în formula generală

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho}$$

se află numai termenii de forma $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho}$ corespunzători variabilelor x (sau y sau z) ale lui f prin intermediul cărora funcția compusă

$$F(\rho, \theta, \varphi) = f(\underbrace{\rho \cos \theta \sin \varphi}_x, \underbrace{\rho \sin \theta \sin \varphi}_y, \underbrace{\rho \cos \varphi}_z)$$

depinde de variabila ρ . Acești termeni amintesc de regula de derivare a funcțiilor compuse de o variabilă reală $(g(u(t)))' = g'(u(t)) \cdot u'(t)$.

Observație. Formulele care dau derivatele parțiale de ordin superior ale funcției compuse $F = f \circ u$ în funcție de derivatele parțiale ale funcțiilor ce se compun se obțin derivând derivatele parțiale de ordinul întâi, având în vedere regulile de derivare ale operațiilor ce apar, inclusiv a operației de compunere a funcțiilor. Facem câteva precizări generale, plecând de la una din derivatele de mai sus.

Am avut de calculat $\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$. Aici,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi).$$

Notăm $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ și atunci, derivata $\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ înseamnă derivata

$$\frac{\partial}{\partial \rho} g(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi).$$

Ori, aceasta este deja calculată, $\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \rho}$, rămânând să înlocuim $g = \frac{\partial f}{\partial x}$ pentru formula generală (și derivatele $\frac{\partial x}{\partial \rho}$, $\frac{\partial y}{\partial \rho}$, $\frac{\partial z}{\partial \rho}$, pentru formula particulară din Problemă):

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \cos \varphi.$$

Mai facem precizarea că Teorema 5.3.2 privind diferențiabilitatea funcțiilor compuse dă formulele de calcul pentru derivatele parțiale de ordin doi ale unei funcții compuse. În demonstrația Teoremei sunt deduse aceste formule, la modul general.

Este recomandat ca aceste formule să fie deduse de fiecare dată, plecând de la derivatele parțiale de ordinul întâi.

Observație. Pentru o funcție f de clasă C^2 și de două sau trei variabile reale, expresia $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ respectiv $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ se numește laplaceianul lui f .

Expresia $\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\text{ctg} \varphi}{\rho^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi}$ se numește laplaceianul lui f în coordonate sferice (polare în spațiu). Problema arată că laplaceianul unei funcții de clasă C^2 nu se schimbă (este invariant) la trecerea la coordonate sferice (polare în spațiu).

Problema 15

Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \cos y - \cos(1 - \cos x)}{x^4 + y^4}$.

Rezolvare. Folosim Formula lui Taylor de ordinul patru pentru funcția de două variabile $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \cos y - \cos(1 - \cos x)$$

(vezi Teorema 5.4.5). Pentru aceasta, calculăm, pentru început, derivatele parțiale până la ordinul patru inclusiv:

a). derivatele parțiale de ordinul întâi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(1 - \cos x) \cdot \sin x - \frac{x^3}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y - \sin y;$$

b). derivatele parțiale de ordinul doi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos(1 - \cos x) \cdot \sin^2 x + \sin(1 - \cos x) \cdot \cos x - x^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1 - \cos y;$$

c). derivatele parțiale de ordinul trei:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= -\sin(1 - \cos x) \cdot \sin^3 x + \cos(1 - \cos x) \sin 2x + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(1 - \cos x) \sin 2x - \sin(1 - \cos x) \sin x - 2x, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \sin y;$$

d). derivatele parțiale de ordinul patru:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} &= \cos(1 - \cos x) (-\sin^4 x + 3 \cos 2x - \sin^2 x) + \\ &\quad + \sin(1 - \cos x) (-4 \sin^2 x \cos x - \sin x \sin 2x - \cos x) - 2, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \cos y.$$

Calculăm valoarea lui f și a derivatelor parțiale de mai sus în punctul $(0,0)$ și scriem Formula lui Taylor amintită:

$$f(x,y) = \frac{1}{4!} (x^4 + y^4) + \omega(x,y) (x^2 + y^2)^2,$$

unde ω este o funcție continuă și nulă în $(0,0)$.

Acum, calculăm limita:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \cos y - \cos(1 - \cos x)}{x^4 + y^4} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x,y)}{x^4 + y^4} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\frac{1}{4!} (x^4 + y^4) + \omega(x,y) (x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^4} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{4!} + \omega(x,y) \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^4} \right) = \frac{1}{4!}, \end{aligned}$$

pentru că $\left| \omega(x,y) \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^4} \right| \leq 2|\omega(x,y)| \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}]{} 0$.

În concluzie, limita cerută este $\frac{1}{24}$. ■

Observație. Pentru calculul limitelor funcțiilor de mai multe variabile, nu există o Teoremă de tip l'Hôpital.

Metoda de mai sus suplinește această lipsă.

Problema 16

Să se determine punctele de extrem local ale funcției

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = (x + y)e^{-(x^2 + y^2)}.$$

Rezolvare. Funcția f este de clasă C^1 pe mulțimea deschisă \mathbb{R}^2 . Conform Teoremei 5.4.6 (Fermat), punctele de extrem local ale funcției f se află printre punctele staționare ale sale, adică printre soluțiile sistemului (S) : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.

Calculăm derivatele parțiale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1 - 2xy - 2x^2)e^{-(x^2 + y^2)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1 - 2xy - 2y^2)e^{-(x^2 + y^2)}.$$

Sistemul (S) devine

$$(S) : \begin{cases} 2xy + 2x^2 = 1 \\ 2xy + 2y^2 = 1 \end{cases},$$

pentru că exponențiala nu se anulează.

Scăzând ecuațiile sistemului, rezultă că $y = \pm x$ și ca urmare, soluțiile sistemului sunt : $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ și $b = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Pentru a stabili dacă aceste puncte staționare ale funcției sunt puncte de extrem local, folosim condiția suficientă de extrem dată de Teorema 5.4.7, condiție care pentru funcții de două variabile este precizată exact în Remarca 5.4.6. Pentru aceasta, calculăm mai întâi derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^{-(x^2 + y^2)} (4x^2y + 4x^3 - 2y - 6x),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = e^{-(x^2 + y^2)} (4xy^2 + 4y^3 - 2x - 6y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^{-(x^2 + y^2)} (4x^2y + 4xy^2 - 2y - 2x)$$

și apoi valorile lor în punctele staționare a și b ale funcției:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{\sqrt{e}}, \quad A' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{\sqrt{e}},$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{\sqrt{e}}, \quad B' = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = -\frac{3}{\sqrt{e}}, \quad C' = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{\sqrt{e}}.$$

În punctul a avem $\Delta = B^2 - AC = -\frac{8}{e} < 0$, ceea ce arată că a este punct de extrem local pentru f și anume, punct de maxim local, pentru că $A < 0$. Valoarea maximă locală a funcției este

$$f_{\max \text{ loc}} = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

În punctul b avem $\Delta = B^2 - AC = -\frac{8}{e} < 0$, ceea ce arată că b este punct de extrem local pentru f și anume, punct de minim local, pentru că $A' > 0$. Valoarea minimă locală a funcției este

$$f_{\min \text{ loc}} = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{e}}. \blacksquare$$

Observație. Condiția suficientă de extrem din Teorema 5.4.7 este dată în termeni de diferențiala a doua sau în termeni privind matricea hessiană f'' a funcției în punctul staționar supus studiului (vezi Remarca 5.4.5).

Problema 17

Să se determine extremele funcției implicite $z = z(x,y)$ definită de ecuația $z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0$.

Rezolvare. Fie (x_0, y_0) un punct de extrem local pentru funcția implicită $z = z(x,y)$ definită de ecuația din enunț. Atunci, (x_0, y_0) este punct staționar pentru funcția z (Teorema 5.4.6 a lui Fermat), adică $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Cum funcția z este definită de ecuația $F(x,y,z) = 0$, din TFI (Teorema 5.5.1) rezultă că $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Așadar, x_0, y_0 și $z_0 = z(x_0, y_0)$ sunt soluții ale sistemului

$$(S) : F(x,y,z) = 0, \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0.$$

Concret, în Problema, acest sistem este (se subînțelege, F este membrul stâng al ecuației din enunț)

$$(S) : \begin{cases} z^3 + z + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) & = 0 \\ 40x - 8y - 8 & = 0 \\ 40y - 8x - 8 & = 0 \end{cases}$$

și are o singură soluție: $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = 1$.

Observăm că pentru orice $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 1 \neq 0$.

Din cele spuse mai sus se constată cu ușurință (Teorema 5.5.1 TFI) că ecuația dată admite o singură soluție $z = z(x,y)$ pe o vecinătate U_0 a punctului $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ astfel ca $z(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 1$ și este de clasă C^2 . În plus, punctul $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ este punct staționar pentru această funcție. Tot din TFI avem

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{40x - 8y - 8}{3z^2(x,y) + 1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{40y - 8x - 8}{3z^2(x,y) + 1},$$

pentru fiecare $(x,y) \in U_0$,

Folosind formulele de derivare ale funcțiilor compuse (vezi Teorema 5.3.1), se obțin derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției z :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{40(3z^2(x,y) + 1) - (40x - 8y - 8)6z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)}{(3z^2(x,y) + 1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{40(3z^2(x,y) + 1) - (40y - 8x - 8)6z(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)}{(3z^2(x,y) + 1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{8(3z^2(x,y) + 1) - (40y - 8x - 8)6z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)}{(3z^2(x,y) + 1)^2}$$

și ca urmare, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -10$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = -10$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 2$.

De aici și din Teorema 5.4.7 (și Remarca 5.4.6) tragem concluzia că punctul $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ este punct de extrem local pentru funcția z și anume punct de maxim. Valoarea maximă locală a lui z este

$$z_{\max \text{ loc}} = z(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = 1.$$

Facem următoarea observație: din identitatea

$$z^3(x,y) + z(x,y) + 20(x^2 + y^2) - 8(xy + x + y) = 0,$$

valabilă pentru fiecare $(x,y) \in U_0$, rezultă că

$$(1 - z(x,y))(z^2(x,y) + z(x,y) + 2) = (4x - 1)^2 + (4y - 1)^2 + 4(x - y)^2,$$

ceea ce arată că $z(x,y) \leq 1$, $\forall z(x,y) \in U_0$.

Aceasta arată că punctul $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ este punct de maxim absolut pentru funcția implicită $z = z(x,y)$. ■

Observație. Se poate întâmpla ca sistemul (S) de mai sus să aibă mai multe soluții (x_0, y_0, z_0) . În acest caz, se studiază dacă funcția implicită $z = z(x,y)$ definită de ecuație și de fiecare condiție inițială $z(x_0, y_0) = z_0$, z de clasă C^2 , are un extrem local în (x_0, y_0) .

Problema 18

Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 4x - 6 & = 0 \\ x^3 - y^3 + z^3 - t^3 - 3z & = 0 \end{cases}$$

definește pe o vecinătate a punctului $(0,1)$ funcțiile $z = z(x,y)$, $t = t(x,y)$ care verifică condițiile $z(0,1) = 2$, $t(0,1) = 1$ și care sunt de clasă C^∞ . Este punctul $(0,1)$ punct de extrem local pentru funcția z ? Să se scrie ecuația planului tangent la suprafața de ecuație $t = t(x,y)$ în punctul $(0,1,1)$.

Rezolvare. Enunțul sugerează să aplicăm Teorema sistemelor de funcții implicite (Teorema 5.5.2). Pentru aceasta, considerăm funcțiile $F, G : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$F(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 4x - 6,$$

$$G(x,y,z,t) = x^3 - y^3 + z^3 - t^3 - 3z,$$

(în rolul funcțiilor F_1 respectiv F_2 din Teoremă). Fie încă punctele $(0,1)$ și $(2,1)$ din \mathbb{R}^2 (în rolul punctelor a respectiv b din Teoremă).

Se constată că se verifică ipotezele din Teoremă:

- 1). $F(0,1,2,1) = 0$, $G(0,1,2,1) = 0$;
- 2). funcțiile F și G sunt de clasă C^∞ pe \mathbb{R}^4 , fiind funcții polinomiale;
- 3). determinantul funcțional $\frac{D(F,G)}{D(z,t)}$ este nenul în $(0,1,2,1)$ pentru că

$$\begin{aligned} \frac{D(F,G)}{D(z,t)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z & 2t \\ 3z^2 - 3 & -3t^2 \end{vmatrix} = \\ &= -6zt^2 - 6t(z^2 - 1) \Big|_{(0,1,2,1)} = -30. \end{aligned}$$

Conform teoremei, există o vecinătate U_0 a punctului $(0,1)$ și o vecinătate V_0 a punctului $(2,1)$ și o funcție vectorială $(z,t) : U_0 \rightarrow V_0$ astfel încât, pentru $(x,y) \in U_0$,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2(x,y) + t^2(x,y) - 4x - 6 = 0 \\ x^3 - y^3 + z^3(x,y) - t^3(x,y) - 3z(x,y) = 0 \end{cases}$$

(adică funcțiile z și t sunt soluții în raport cu z și t ale sistemului dat pe mulțimea U_0).

În plus, $z(0,1) = 2$, $v(0,1) = 1$, funcțiile z și t sunt de clasă C^∞ pe U_0 și sunt unice cu aceste proprietăți. Din cele spuse mai sus, rezultă că sistemul dat definește pe vecinătatea U_0 a punctului $(0,1)$ pe z și t ca funcții de x și y (vezi Definiția 5.5.4).

Prima parte a problemei este rezolvată.

TSFI dă expresiile derivatelor parțiale ale funcțiilor z și t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\frac{D(F,G)}{D(x,t)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,t)}}, & \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\frac{D(F,G)}{D(y,t)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,t)}} \\ \frac{\partial t}{\partial x}(x,y) &= -\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,t)}}, & \frac{\partial t}{\partial y}(x,y) &= -\frac{\frac{D(F,G)}{D(z,y)}}{\frac{D(F,G)}{D(z,t)}} \end{aligned}$$

pentru $(x,y) \in U_0$, cei cinci determinanți funcționali calculându-se în punctul $(x,y,z(x,y),t(x,y))$.

Calculăm acești determinanți funcționali:

$$\begin{aligned} \frac{D(F,G)}{D(x,t)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x - 4 & 2t \\ 3x^2 & -3t^2 \end{vmatrix} = \\ &= -6t^2(x,y)(x - 2) - 6x^2t(x,y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D(F,G)}{D(y,t)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial t} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2t \\ -3y^2 & -3t^2 \end{vmatrix} = \\ &= -6yt^2(x,y) + 6y^2t(x,y), \\ \frac{D(F,G)}{D(z,x)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z & 2x-4 \\ 3z^2-3 & 3x^2 \end{vmatrix} = \\ &= 6x^2z(x,y) - (3z^2(x,y) - 3)(2x-4), \\ \frac{D(F,G)}{D(z,y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z & 2y \\ 3z^2-3 & -3y^2 \end{vmatrix} = \\ &= -6y^2z(x,y) - 2y(3z^2(x,y) - 3) \end{aligned}$$

și atunci, $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = -\frac{2}{5}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial t}{\partial x}(x,y) = -\frac{6}{5}$, $\frac{\partial t}{\partial y}(x,y) = -1$.

Deoarece derivatele parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ nu sunt nule în punctul $(0,1)$, acesta nu este punct de extrem local pentru funcția z (vezi Teorema 5.4.6 a lui Fermat).

Având în vedere cele spuse în §5.9.2, ecuația planului tangent la suprafața de ecuație $t = t(x,y)$ în punctul $(0,1,1)$ este

$$6x + 5y + 5t - 10 = 0. \blacksquare$$

Observație. Pentru a determina extremele funcțiilor implicite $z = z(x,y)$ și $t = t(x,y)$ definite de sistemul dat se poate proceda ca în problema anterioară.

Problema 19

Să se arate că funcția

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \rightarrow (0,\infty) \times (0,\infty), f(x,y) = (xy, \frac{y}{x})$$

este regulată și bijectivă. Să se constate că funcția inversă f^{-1} este regulată. Să se determine imaginea $f(K)$ a domeniului compact K limitat de curbele de ecuații $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 5x$.

Rezolvare. Pe domeniul $D = (0,\infty) \times (0,\infty)$ din \mathbb{R}^2 , componentele $f_1(x,y) = xy$ și $f_2(x,y) = \frac{y}{x}$ sunt de clasă C^1 , fiind funcții elementare. Apoi, jacobianul J_f al lui f este

$$J_f = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x,y)}(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} \neq 0.$$

Conform cu Definiția 5.6.1, funcția f este regulată pe D .

Fie acum un punct oarecare $(u, v) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$. Egalitatea $f(x, y) = (u, v)$, văzută ca o ecuație, înseamnă sistemul $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$, care are soluția unică $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \sqrt{uv}$.

Aceasta arată că funcția f este bijectivă (vezi Remarca 1.2.3), iar funcția inversă a sa este $f^{-1} : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \times (0, \infty)$, definită prin $f^{-1}(u, v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv})$.

(vezi Remarca 1.2.4). Ca și mai sus, componentele lui f^{-1} sunt de clasă C^1 pe D , iar jacobianul $J_{f^{-1}}$ al lui f^{-1} este

$$J_{f^{-1}}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.$$

Conform cu Definiția 5.6.1, funcția f^{-1} este regulată pe D .

Deoarece f este continuă pe D (direct sau din Propoziția 5.6.2), avem că ea transformă mulțimea compactă K (vezi mai jos) tot într-o mulțime compactă $\Omega = f(K)$. Conform cu Corolarul 5.6.1, transformarea regulată f duce interiorul lui K într-o mulțime deschisă, evident inclusă în $f(K)$ și exteriorul lui K într-o mulțime deschisă, evident inclusă în $f(K)$. Ca urmare, transformarea regulată f duce frontiera lui K , adică patrulaterul curbiliniu P în frontiera lui $f(K)$, pe care o notăm Γ . Așadar, mulțimea compactă $\Omega = f(K)$ este limitată de curba Γ .

Determinăm acum imaginile prin f ale fiecăreia din curbele din enunț. Fie C_1 curba de ecuație $y = \frac{1}{x}$. Aceasta înseamnă că (vezi Definiția 5.9.7) $C_1 = \{(x, y) \in D \mid y = \frac{1}{x}\}$. Ca urmare, $f(C_1) = f(x, \frac{1}{x}) = (1, \frac{1}{x^2})$, $x > 0$, ceea ce arată că $f(C_1)$ este dreapta $u = 1$ din planul $(u, v) \equiv \mathbb{R}^2$ (mai exact, este semidreapta $u = 1, v > 0$).

La fel, f transformă curba $y = \frac{2}{x}$ în semidreapta $u = 2, v > 0$, curba $y = \frac{x}{2}$ în semidreapta $v = \frac{1}{2}, u > 0$ și curba $y = 5x$ în semidreapta $v = 5, u > 0$.

Din cele spuse mai sus, rezultă că curba Γ este dreptunghiul $A'B'C'D'$ din planul $(u, v) \equiv \mathbb{R}^2$ (văzut ca linie poligonală închisă), unde $A'(1, \frac{1}{2})$, $B'(2, \frac{1}{2})$, $C'(2, 5)$, $D'(1, 5)$.

În concluzie, imaginea $f(K)$ este $\Omega =$ dreptunghiul plin $A'B'C'D'$, adică $\Omega = [1, 2] \times [\frac{1}{2}, 5]$. ■

Observație. Se observă că între jacobienii lui f și f^{-1} are loc relația (care amintește de formula ce dă derivata funcției inverse a unei funcții reale de o variabilă reală) $J_{f^{-1}}(u, v) = \frac{1}{J_f(x, y)}$, cu $f(x, y) = (u, v)$.

De altfel, transformările regulate generalizează funcțiile reale de o variabilă reală, derivabile; derivata $f'(x)$ devine jacobianul $J_f(x)$ în unele situații dar și matricea jacobiană în alte situații (Teorema 5.6.1). **Observație.** Mulțimea K este limitată de hiperbolele de ecuații $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ și de dreptele de ecuații $y = \frac{x}{2}$, $y = 5x$. Cele patru curbe formează în D un patrulater curbiliniu (notat P). Mulțimea K este domeniul compact limitat de acest patrulater curbiliniu.

Problema 20

Să se determine punctele de extrem ale funcției

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

condiționate de ecuația $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Rezolvare. În general, punctele de extrem ale unei funcții de clasă C^1 , condiționate de o ecuație, se determină prin metoda (multiplicatorilor) lui Lagrange (vezi cele spuse în §5.7). Parcurgem etapele acestei metode.

1). Funcția ajutătoare a lui Lagrange este

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 \right).$$

2). $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + \frac{2\lambda x}{25}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y + \frac{2\lambda y}{9}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z + \frac{2\lambda z}{4}$

și avem de rezolvat sistemul

$$(S) : 2x + \frac{2\lambda x}{25} = 0, 2y + \frac{2\lambda y}{9} = 0, 2z + \frac{2\lambda z}{4} = 0, \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Se constată cu ușurință că soluțiile (x,y,z,λ) ale sistemului sunt

$$(\pm 5, 0, 0, -25), (0, \pm 3, 0, -9), (0, 0, \pm 2, -4).$$

Așadar, punctele $(\pm 5, 0, 0)$, $(0, \pm 3, 0)$, $(0, 0, \pm 2)$ sunt puncte staționare condiționate pentru funcția f .

3 - 4 - 5). Pentru $\lambda = -25$, avem

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25 \left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 \right).$$

Ca urmare, în punctele $(\pm 5, 0, 0)$ avem (vezi Exemplitul 5.2.4)

$$d^2\Phi(\pm 5, 0, 0) = -\frac{32}{9}dy^2 - \frac{21}{2}dz^2.$$

Se vede de aici că forma pătratică $d^2\Phi(\pm 5, 0, 0)$ este negativ definită, ceea ce arată că punctele $(\pm 5, 0, 0)$ sunt puncte de maxim condiționat pentru funcția f (vezi Teorema 5.4.7).

Pentru $\lambda = -9$, avem

$$\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 \left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 \right).$$

Ca urmare, în punctele $(0, \pm 3, 0)$ avem $d^2\Phi(0, \pm 3, 0) = \frac{32}{25}dx^2 - \frac{5}{2}dz^2$.

Este evident că această formă pătratică nu este definită ca semn. Aceasta arată că punctele $(0, \pm 3, 0)$ nu sunt puncte de extrem condiționat pentru funcția f (vezi Teorema 5.4.7).

În sfârșit, pentru $\lambda = -4$, avem

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4\left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1\right).$$

Ca urmare, în $(0, 0, \pm 2)$ avem $d^2\Phi(0, 0, \pm 2) = \frac{42}{25}dx^2 + \frac{10}{9}dy^2$.

Se vede de aici că forma pătratică $d^2\Phi(0, 0, \pm 2)$ este pozitiv definită, ceea ce arată că punctele $(0, 0, \pm 2)$ sunt puncte de minim condiționat pentru funcția f . (Teorema 5.4.7). ■

Observație. Când se spune că forma pătratică

$$d^2\Phi(\pm 5, 0, 0) = -\frac{32}{9}dy^2 - \frac{21}{2}dz^2$$

este negativ definită, trebuie înțeles că funcția reală de trei variabile reale (în fapt de două, pentru că dx lipsește) $-\frac{32}{9}u^2 - \frac{21}{2}v^2$ ia numai valori ≤ 0 atunci când $u, v \in \mathbb{R}$.

Când se spune că forma pătratică

$$d^2\Phi(0, 0, \pm 2) = \frac{42}{25}dx^2 + \frac{10}{9}dy^2$$

este pozitiv definită, trebuie înțeles că funcția reală de trei variabile reale (în fapt de două, pentru că dz lipsește) $\frac{42}{25}u^2 + \frac{10}{9}v^2$ ia numai valori ≥ 0 atunci când $u, v \in \mathbb{R}$.

Când se spune că forma pătratică

$$d^2\Phi(0, \pm 3, 0) = \frac{32}{25}dx^2 - \frac{5}{2}dz^2$$

nu este definită ca semn, trebuie înțeles că funcția reală de trei variabile reale (în fapt de două, pentru că dy lipsește) $\frac{32}{25}u^2 - \frac{5}{2}v^2$ ia atât valori pozitive cât și valori negative atunci când $u, v \in \mathbb{R}$.

Observație. În derularea celor cinci etape ale Metodei lui Lagrange, etapa a patra a fost omisă pentru că s-a putut stabili că forma pătratică $d^2\Phi$ este definită ca semn sau nu. Etapa a patra nu aduce nimic nou în studiul semnului formei pătratice $d^2\Phi$. Într-adevăr, diferențiind ecuația $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ în fiecare din punctele $(\pm 5, 0, 0)$ obținem sistemul liniar $dx = 0$, cu soluția $dx = 0$. Ca urmare, înlocuim în forma pătratică $d^2\Phi(\pm 5, 0, 0)$ pe dx cu 0 și obținem ca formă pătratică redusă tot pe $d^2\Phi(\pm 5, 0, 0)$.

Observație. Având în vedere faptul că $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ reprezintă pătratul distanței de la origine la punctul curent al spațiului, iar ecuația $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ este ecuația unui elipsoid E , problema poate fi, geometric vorbind, formulată astfel:

“Să se determine distanța minimă și distanța maximă de la origine la un punct al elipsoidului E ”.

Se poate da și o rezolvare geometrică. Fie $P(x,y,z)$ un punct de pe E . Atunci, $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 5\sqrt{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}} = 5$, ceea ce arată că elipsoidul E este situat în interiorul sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Vedem elipsoidul E ca o “sferă turtită” și mai ținem seama de faptul că cele trei semiaxe ale elipsoidului sunt distincte două câte două (adică elipsoidul nu este un elipsoid de rotație). Având în vedere axa mare a elipsoidului, acesta este tangent la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ și “înscris” în aceasta. De aici, distanța maximă căutată este 5, punctele de maxim condiționat corespunzătoare fiind $(\pm 5, 0, 0)$. La fel, având în vedere axa mică a elipsoidului, acesta este “circumscriș” sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. De aici, distanța minimă căutată este 2, punctele de minim condiționat fiind $(0, 0, \pm 2)$. În sfârșit, pentru orice alt punct P_0 al elipsoidului diferit de cele patru puncte considerate, sfera cu centrul în origine și rază OP_0 conține, în jurul lui P_0 , atât puncte interioare cât și puncte exterioare elipsoidului. Ca urmare, acest punct nu este punct de extrem condiționat pentru f . Menționăm că o poziție aparte a lui P_0 este $(0, \pm 3, 0)$. Acum, elipsoidul este tangent sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, dar nu este nici “înscris” și nici “circumscriș” sferei (două dintre secțiunile elipsoidului cu planele de coordonate sunt “înscrise” respectiv “circumscrișe” în câte un cerc mare al acestei sfere). De aici, avem că în orice vecinătate a fiecăruia din punctele $(0, \pm 3, 0)$, avem puncte pe elipsoid cu distanța la origine < 3 dar și > 3 . Aceste puncte nu sunt puncte de extrem condiționat pentru funcția f .

Observație. Uneori, se caută punctele de extrem ale unei funcții condiționate de mai multe ecuații. Acum, funcția ajutătoare a lui Lagrange are mai mulți multiplicatori, câte unul pentru fiecare astfel de ecuație (vezi cele spuse în §5.7).

Problema 21

Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x(x+y)$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Rezolvare. Domeniul de definiție D al funcției f este o mulțime compactă (Teorema 2.3.9 a lui Heine – Borel – Lebesgue în \mathbb{R}^p) iar f este o funcție continuă, fiind polinomială. Conform Teoremei lui Weierstrass (Corolarul 4.2.4), funcția f este mărginită și își atinge marginile, adică există x_1 și $x_2 \in D$ astfel încât

$$f(x_1) = \inf_{x \in D} f(x) \leq f(x) \leq \sup_{x \in D} f(x) = f(x_2), \forall x \in D.$$

Conform Definiției 5.4.3, punctele x_1 și x_2 sunt puncte de extrem absolut pentru funcția f . Pe de altă parte, funcția f este derivabilă parțial, fiind polinomială (chiar mai mult, este funcție de clasă C^∞). Conform Teoremei 5.4.6 a lui Fermat, acela dintre punctele x_1 și x_2 care este punct interior lui D este punct staționar pentru f , adică anulează derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ ale lui f . Din $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, avem că sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ are o singură soluție: $x = 0$, $y = 0$. Aplicând Teorema 5.4.7 (sau Remarca 5.4.6), se constată cu ușurință că punctul staționar $(0,0)$ al lui f nu este punct de extrem local. Așadar, ambele puncte x_1 și x_2 nu sunt interioare lui D și ca urmare, ele sunt situate pe frontiera domeniului D , adică pe cercul de ecuație $x^2 + y^2 = 1$.

De aici rezultă că pentru determinarea lui x_1 și x_2 trebuie să determinăm extremele lui f condiționate de ecuația $x^2 + y^2 = 1$. Pentru aceasta, aplicăm metoda (multiplicatorilor) lui Lagrange (vezi cele spuse în §5.7). Parcurgem etapele acestei metode.

1). Funcția ajutătoare a lui Lagrange este

$$\Phi(x,y) = x(x + y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

2). $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + y + 2\lambda x$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + 2\lambda y$ și avem de rezolvat sistemul $2x + y + 2\lambda x = 0$, $x + 2\lambda y = 0$, $x^2 + y^2 = 1$.

Se constată cu ușurință că soluțiile (x,y,λ) ale sistemului sunt

$$\left(\mp \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right), \left(\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, -\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right).$$

Așadar, punctele

$$a = \left(\mp \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right), b = \left(\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)$$

sunt puncte staționare condiționate pentru funcția f .

3 - 4 - 5). Se constată că în fiecare punct (x_0, y_0) din \mathbb{R}^2 avem

$$d^2\Phi(x_0, y_0) = (2 + 2\lambda)dx^2 + 2dxdy + 2\lambda dy^2,$$

de unde tragem următoarele concluzii:

i). pentru $\lambda = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$, în cele două puncte a avem

$$d^2\Phi(a) = (1 + \sqrt{2})dx^2 + 2dxdy + (-1 + \sqrt{2})dy^2 =$$

$$(1 + \sqrt{2})[dx + (\sqrt{2} - 1)dy]^2 \geq 0,$$

ceea ce arată că punctele a sunt puncte de minim condiționat pentru funcția f . (vezi Teorema 5.4.7).

ii). pentru $\lambda = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$, în cele două puncte b avem

$$\begin{aligned} d^2\Phi(b) &= (1 - \sqrt{2})dx^2 + 2dxdy - (1 + \sqrt{2})dy^2 = \\ &= (1 - \sqrt{2})[dx - (1 + \sqrt{2})dy]^2 \leq 0, \end{aligned}$$

ceea ce arată că punctele b sunt puncte de maxim condiționat pentru funcția f . (vezi Teorema 5.4.7).

În concluzie, cea mai mică valoare a lui f este $f(a) = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, iar cea mai mare valoare a lui f este $f(b) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. ■

Observație. Nu a fost nevoie de determinarea formei pătratice reduse pentru studiul formei pătratice $d^2\Phi$ deoarece acest studiu s-a putut face cu trinomul de gradul doi.

Problema 22

În ecuația $a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, a , b , c fiind constante reale, $c \neq 0$, se face schimbarea de variabile $u = x + py$, $v = mx + qy$, cu m , p și q constante reale. Atunci, $z(x,y)$ devine o funcție $w(u,v)$. Să se arate că dacă $b^2 - ac > 0$ sau $b^2 - ac = 0$, respectiv $b^2 - ac < 0$, atunci se pot alege m , p și q astfel încât

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0 \quad \text{respectiv} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

Ca aplicație, să se determine toate funcțiile $z(x,y)$ de clasă C^2 pe \mathbb{R}^2 care verifică ecuațiile

- a). $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$,
b). $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Rezolvare. Avem în vedere cele spuse în §5.8 / 5.8.2 în legătură cu schimbările de variabile în expresii ce conțin derivate parțiale. Din relațiile $u = x + py$, $v = mx + qy$, putem exprima pe x și y ca funcții de u și v , $x = x(u,v)$ și $y = y(u,v)$ și atunci,

$$z = z(x,y) = z(x(u,v), y(u,v)) = w(u,v) = w(x + py, mx + qy).$$

Folosind formulele de derivare a funcțiilor compuse date de Teorema 5.3.2, obținem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}m + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}m^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}p + \frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}(q + pm) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}mq,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}p^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}pq + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}q^2,$$

pentru că $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = p$, $\frac{\partial v}{\partial x} = m$, $\frac{\partial v}{\partial y} = q$, iar derivatele de ordin doi sunt evidente nule. În aceste formule, derivatele parțiale ale funcției z sunt calculate în punctul (x,y) iar cele ale funcției w în punctul $(x$

+ py, mx + qy). Introducând aceste derivate în ecuația dată, aceasta devine

$$(a + 2bp + cp^2) \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + (2am + 2b(q + pm) + 2cpq) \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + (am^2 + 2bmq + cq^2) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$$

Ne situăm acum în fiecare din cele trei situații din enunț:

i). dacă $b^2 - ac > 0$, ecuația de gradul al doilea $ct^2 + 2bt + a = 0$ are două rădăcini reale și distincte t_1 și t_2 . Alegând pe p și q drept t_1 și respectiv t_2 și $m = 1$, ecuația anterioară devine $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$.

ii). dacă $b^2 - ac = 0$, ecuația de gradul al doilea $ct^2 + 2bt + a = 0$ are două rădăcini reale și egale: $t_1 = t_2 = -\frac{b}{c}$. Alegând $p = -\frac{b}{c}$, $q = 0$ și $m = 1$, ecuația anterioară devine $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

iii). dacă $b^2 - ac < 0$, ecuația de gradul al doilea $ct^2 + 2bt + a = 0$ are două rădăcini complexe $t_1 = \alpha + i\beta$ și $t_2 = \alpha - i\beta$. Alegând $p = \alpha$, $q = \beta$ și $m = 0$, ecuația anterioară devine $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

Trecem la cazurile concrete.

a). Suntem în cazul $a = 1$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = -4$. Ecuația în t are două rădăcini reale și distincte: $t_1 = -1$ și $t_2 = \frac{1}{4}$. Cu schimbarea de variabilă $u = x - y$, $v = x + \frac{1}{4}y$, ecuația devine $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$. Scriem această ecuație sub forma $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) = 0$, de unde rezultă că $\frac{\partial w}{\partial v}$ nu depinde de u . Ca urmare, $\frac{\partial w}{\partial v}$ este de forma $\frac{\partial w}{\partial v} = f(v)$. Integrând acum această ecuație, obținem $w = \int f(v)dv + G(u)$, G fiind o funcție arbitrară. Notând cu F o primitivă a lui f , soluția generală a ecuației $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$ este $w = F(v) + G(u)$.

Revenind la vechile variabile, soluția generală a ecuației în z de la punctul a) este $z(x, y) = F(x + \frac{1}{4}y) + G(x - y)$, cu F și G funcții arbitrare de clasă C^2 pe \mathbb{R}^2 .

b). Suntem în cazul $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. Ecuația în t are două rădăcini reale și egale $t_1 = t_2 = -\frac{1}{2}$. Cu schimbarea de variabilă $u = x - \frac{1}{2}y$, $v = x$, ecuația devine $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$. Scriem această ecuație sub forma $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) = 0$, de unde rezultă că $\frac{\partial w}{\partial v}$ nu depinde de v . Ca urmare, $\frac{\partial w}{\partial v}$ este de forma $\frac{\partial w}{\partial v} = G(u)$, G fiind o funcție arbitrară. Integrând acum această ecuație, obținem $w = vG(u) + F(u)$.

Revenind la vechile variabile, soluția generală a ecuației în z de la punctul b) este $z(x, y) = xG(x - \frac{1}{2}y) + F(x - \frac{1}{2}y)$, cu F și G funcții arbitrare de clasă C^2 pe \mathbb{R}^2 . ■

Observație. Se spune că ecuația dată este de tip

- hiperbolic, atunci când $b^2 - ac > 0$,
- parabolic, atunci când $b^2 - ac = 0$,
- eliptic, atunci când $b^2 - ac < 0$.

Observație. Ecuația $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$ se numește forma canonică a ecuației de tip hiperbolic. Uneori, această formă canonică se înlocuiește cu ecuația $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0$. La aceasta din urmă se ajunge dacă în ecuația $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$ se face schimbarea de variabilă $\xi = u + v$, $\eta = u - v$.

Ecuația $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ se numește forma canonică a ecuației de tip parabolic.

Ecuația $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$ se numește forma canonică a ecuației de tip eliptic.

Observație. O ecuație de forma $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ se numește ecuația lui Laplace. Soluțiile ei se numesc funcții armonice.

Problema 23

Folosind teorema de derivare sau teorema de integrare sub semnul integral, să se calculeze integrala cu parametru

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} \ln \left(\frac{1+x \sin t}{1-x \sin t} \right) dt, \quad |x| < 1.$$

Rezolvare. Funcția de sub semnul integral,

$$f : (-1,1) \times (0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,t) = \frac{1}{\sin t} \ln \left(\frac{1+x \sin t}{1-x \sin t} \right),$$

este continuă, fiind o compunere de astfel de funcții (vezi Teoremele 4.2.5, 4.2.6). Aparent, integrala dată este “improprie” în punctul 0. Aplicând regula lui l’Hôpital, avem

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{\sin t} \ln \left(\frac{1+x \sin t}{1-x \sin t} \right) = \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{\cos t} \left[\frac{x \cos t}{1+x \sin t} + \frac{x \cos t}{1-x \sin t} \right] = 2x,$$

ceea ce arată că, de fapt, integrala dată este “proprie” în punctul 0, în sensul că f se poate prelungi în punctele $(x,0)$, chiar prin continuitate, astfel încât integrala $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,t) dt$ este o integrală Riemann (adică

proprie). Notând tot cu $f(x,t)$ această prelungire, adică

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sin t} \ln \left(\frac{1+x \sin t}{1-x \sin t} \right), & (x,t) \in (-1,1) \times (0, \frac{\pi}{2}] \\ 2x, & (x,t) \in (-1,1) \times \{0\} \end{cases},$$

integrala din enunț trebuie văzută ca fiind $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,t)dt$.

Pentru calculul acestei integrale cu parametru, avem în vedere Teorema 7.5.2 de derivare a unei integrale cu parametru. Funcția f de mai sus este continuă pe mulțimea $(-1,1) \times [0, \frac{\pi}{2}]$, este derivabilă parțial în raport cu x ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \begin{cases} \frac{2}{1-x^2 \sin^2 t}, & (x,t) \in (-1,1) \times (0, \frac{\pi}{2}] \\ 2, & (x,t) \in (-1,1) \times \{0\} \end{cases},$$

(vezi Definiția 5.1.1 și Remarca 5.1.1), iar această derivată este continuă pe domeniul său de definiție $(-1,1) \times [0, \frac{\pi}{2}]$ (vezi Definiția 4.2.5 și Teorema 4.2.1 – Criteriul lui Heine).

Conform Teoremei amintite mai sus, funcția F este derivabilă și cu derivata continuă pe intervalul $(-1,1)$; derivata lui F este dată de formula

$$F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-x^2 \sin^2 t} dt.$$

Cu substituția $\operatorname{tg} t = v$, (și cu a doua formulă de schimbare de variabilă – vezi Remarca 7.1.11), avem în continuare

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-x^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{\infty} \frac{2}{1-x^2 \frac{v^2}{1+v^2}} \frac{1}{1+v^2} dv = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2}{1+(1-x^2)v^2} dv = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctg} v\sqrt{1-x^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

De aici, rezultă că $F(x) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi \operatorname{arcsin} x + c$, unde constanta c rămâne să fie determinată.

Cum din definiția lui F avem $F(0) = 0$, rezultă $c = 0$.

În concluzie, $F(x) = \pi \operatorname{arcsin} x$, pentru $x \in (-1,1)$. ■

Observație. Integrala cu parametru dată se poate calcula și cu Teorema de integrare sub semnul integral (vezi Teorema 7.5.4).

Pentru aceasta, avem în vedere identitatea

$$\int_0^1 \frac{1}{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+1}{a-1}, \text{ pentru } a > 1,$$

care rezultă ușor din Formula lui Leibniz–Newton (vezi §7.2/7.2.2 și Teorema 7.1.8). Înlocuim aici $a = \frac{1}{x \sin t}$ pentru $(x,t) \in (-1,1) \times (0, \frac{\pi}{2}]$

și după ușoare calcule, avem $\int_0^1 \frac{2x}{1-x^2u^2 \sin^2 t} du = f(x,t)$.

Se constată că această egalitate are loc și pentru $t = 0$.

Așadar, se poate scrie egalitatea

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x,t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{2x}{1-x^2u^2 \sin^2 t} du \right) dt.$$

Aici, aplicăm Teorema amintită funcției, evident continuă,

$$g : [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, g(u,t) = \frac{2x}{1-x^2u^2 \sin^2 t}.$$

Avem deci

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{2x}{1-x^2u^2 \sin^2 t} du \right) dt = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{1-x^2u^2 \sin^2 t} dt \right) du.$$

Integrala interioară o calculăm cu substituția $\operatorname{tg} t = v$, (și cu a doua formulă de schimbare de variabilă – vezi Remarca 7.1.11):

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{1-x^2u^2 \sin^2 t} dt &= \int_0^{\infty} \frac{2x}{1-x^2u^2 \frac{v^2}{1+v^2}} \frac{1}{1+v^2} dv = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2x}{1+v^2(1-x^2u^2)} dv = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2u^2}} \operatorname{arctg} v \sqrt{1-x^2u^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2u^2}}. \end{aligned}$$

Integrala exterioară ne conduce, pentru $x \in (-1,1)$, la F :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2u^2}} du = \pi \operatorname{arcsin} xu \Big|_0^1 = \pi \operatorname{arcsin} x.$$

Observație. Din cele două teoreme amintite și folosite în rezolvarea problemei, se deduc așa numitele metoda derivării sub semnul integral și metoda integrării sub semnul integral pentru calculul unei integrale (cu parametru).

Metoda derivării sub semnul integral pentru calculul unei integrale cu parametru $F(x)$ constă în următoarele:

- se calculează cu teorema amintită derivata $F'(x)$,
- se calculează $F(x) = \int F'(x) dx + c$
- se determină constanta c

Metoda integrării sub semnul integral pentru calculul unei integrale

(proprie sau improprie) $I = \int_a^b g(x)dx$ constă în următoarele:

– se scrie g sub forma $g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt$,

– în $I = \int_a^b \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,t)dt \right) dx$ se schimbă ordinea de integrare (cu una din Teoremele 7.5.4, 7.5.10 – 7.5.13),

– se calculează integrala interioară $\int_a^b f(x,t)dx$,

– se calculează integrala exterioară $\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b f(x,t)dx \right) dt$, obținându-se integrala I .

Problema 24

Folosind metoda derivării sau metoda integrării sub semnul integral, să se calculeze integralele improprie cu parametru

a). $\int_{-1+0}^{1-0} \frac{\arctg tx}{t\sqrt{1-t^2}} dt, x \in \mathbb{R};$

b). $\int_0^{\infty} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} e^{-ax} dx, a > 0, b, c \in \mathbb{R}.$

Rezolvare. a). Funcția $f(x,t) = \frac{\arctg tx}{t\sqrt{1-t^2}}$ este definită și continuă pe mulțimea $\mathbb{R} \times (-1,1) \setminus \{0\}$, fiind o compunere de astfel de funcții (vezi Teoremele 4.2.5, 4.2.6). Aparent, integrala dată este “improprie” și în punctul 0. Aplicând însă regula lui l’Hôpital, avem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctg tx}{t\sqrt{1-t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctg tx}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x}{1+t^2x^2} = x,$$

ceea ce arată că, de fapt, integrala dată este “proprie” în punctul 0, în sensul că f se poate prelungi în punctul $(x,0)$, chiar prin continuitate,

astfel încât integrala $\int_{-1+0}^{1-0} f(x,t)dt$ este o integrală improprie pe $(-1,1)$

cu parametru. Notând tot cu $f(x,t)$ această prelungire, adică

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{\arctg \frac{tx}{t\sqrt{1-t^2}}}{x}, & \text{dacă } (x,t) \in \mathbb{R} \times (-1,1) \setminus \{0\} \\ x, & \text{dacă } (x,t) \in \mathbb{R} \times \{0\} \end{cases},$$

integrala din enunț trebuie văzută ca fiind $\int_{-1+0}^{1-0} f(x,t)dt$.

Pentru calculul acestei integrale improprie cu parametru, aplicăm Teorema 7.5.10 de derivare a unei integrale improprie cu parametru. Verificăm condițiile din Teoremă:

1). funcția f este continuă pe $\mathbb{R} \times (-1,1)$, după cum rezultă din cele spuse mai sus;

2). prin calcul direct se constată că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-t^2}}, (x,t) \in \mathbb{R} \times (-1,1)$$

și că este continuă pe $\mathbb{R} \times (-1,1)$;

3). pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, integrala improprie $F(x) = \int_{-1+0}^{1-0} f(x,t)dt$

este convergentă, conform cu Definiția 7.4.4 a unei astfel de integrale și a Criteriului de comparație (Teorema 7.4.2), prin Corolarul 7.4.1 și 7.4.3, deoarece funcția $g(t) = f(x,t)$ este continuă pe $(-1,1)$ și limitele laterale $\lim_{t \searrow -1} (t+1)^{\frac{1}{2}}g(t)$, $\lim_{t \nearrow 1} (t-1)^{\frac{1}{2}}g(t)$ sunt finite.

4). integrala improprie $\int_{-1+0}^{1-0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ converge uniform în raport cu

parametrul $x \in \mathbb{R}$, conform Teoremei 7.5.6, pentru că

i). funcția $t \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ este continuă pe $(-1,1)$, pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$;

ii). $|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (-1,1)$;

iii). $\int_{-1+0}^{1-0} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ este convergentă, conform Teoremei 7.4.6 (Leibniz-

Newton) și are valoarea $\arcsin x \Big|_{-1}^{+1} = \pi$.

Conform Teoremei amintite, funcția F este de clasă C^1 pe \mathbb{R} și pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$, are loc formula

$$F'(x) = \int_{-1+0}^{1-0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_{-1+0}^{1-0} \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Calculăm această intrgrală improprie începând cu schimbarea de variabilă $t = \sin u$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – vezi Teorema 7.4.8 –

$$\int_{-1+0}^{1-0} \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{1+x^2\sin^2 u} du$$

și continuând cu substituția $\operatorname{tg} u = v$, adică cu schimbarea de variabilă $u = \operatorname{arctg} v$, ținând cont că $\sin u = \frac{\operatorname{tg} u}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}$:

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{2}+0}^{\frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{1+x^2\sin^2 u} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2\frac{v^2}{1+v^2}} \frac{1}{1+v^2} dv = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(1+x^2)v^2} dv = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{arctg} v \sqrt{1+x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Așadar, $F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}$ pentru $x \in \mathbb{R}$ și ca urmare,

$$F(x) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}} dx = \pi \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) + c,$$

conform unui tablou de primitive imediate (vezi §7.2/7.2.2).

Rămâne să determinăm constanta c . Deoarece $F(0) = \int_{-1+0}^{1-0} f(0,t) dt = 0$, din egalitatea anterioară rezultă $c = 0$.

În concluzie, $F(x) = \pi \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$, $x \in \mathbb{R}$.

b). Funcția de sub semnul integral, $f(x) = \frac{\cos bx - \cos cx}{x} e^{-ax}$, este definită și continuă pe mulțimea $(0, \infty)$, fiind o compunere de astfel de funcții (vezi Teoremele 4.2.5, 4.2.6). Aparent, integrala dată este “improprie” în punctul 0. Aplicând însă regula lui l’Hôpital, avem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} e^{-ax} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-b \sin bx + c \sin cx) = 0, \end{aligned}$$

ceea ce arată că, de fapt, integrala dată este “proprie” în punctul 0, în sensul că f se poate prelungi în punctul $x = 0$, chiar prin continuitate, astfel încât integrala improprie dată este o integrală improprie de speța întâi, ca în Definiția 7.4.2. Notând tot cu $f(x)$ această prelungire, adică

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} e^{-ax}, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases},$$

integrala din enunț trebuie văzută ca fiind $I = \int_0^{\infty} f(x) dx$.

Se observă că pentru $x > 0$, putem scrie

$$f(x) = \frac{\cos bx - \cos cx}{x} e^{-ax} = -e^{-ax} \frac{\cos tx}{x} \Big|_b^c = \int_b^c e^{-ax} \sin tx \, dt,$$

egalitate care de altfel, se verifică și pentru $x = 0$.

Ca urmare, se poate scrie,

$$I = \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \left(\int_b^c e^{-ax} \sin tx \, dt \right) dx.$$

Avem aici o integrală improprie a unei integrale proprii cu parametru. Pentru calculul acestei integrale, vom schimba ordinea de integrare, folosind Teorema 7.5.10. Fie deci integrala improprie cu parametru

$I(t) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin tx \, dx$, care verifică condițiile din Teorema amintită:

- i). funcția $f(x,t) = e^{-ax} \sin tx$ este continuă pe mulțimea $[0, \infty) \times [b, c]$;
- ii). integrala improprie cu parametru $I(t)$ converge uniform în raport cu parametru $t \in [b, c]$, conform Teoremei 7.5.6, pentru că:
- j). $|e^{-ax} \sin tx| \leq e^{-ax}$, $\forall (x,t) \in [0, \infty) \times [b, c]$;

jj). $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$ este convergentă, conform Teoremei 7.4.6 (Leibniz–

Newton) și egală cu $-\frac{1}{a} e^{-ax} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}$.

Conform Teoremei amintite mai sus, are loc egalitatea

$$\int_b^c \left(\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin tx \, dx \right) dt = \int_0^{\infty} \left(\int_b^c e^{-ax} \sin tx \, dt \right) dx.$$

Acum calculăm integrala din stânga. Integrând de două ori prin părți,

se constată cu ușurință că $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin tx \, dx = \frac{t}{a^2 + t^2}$ și ca urmare,

$$\int_b^c \left(\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin tx \, dx \right) dt = \int_b^c \frac{t}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2},$$

după cum ușor se poate constata (Teorema 7.1.8, Leibniz–Newton).

În consecință, $I = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2}$. ■

Observație. Metoda derivării sub semnul integral și metoda integrării sub semnul integral rămân valabile și pentru integralele improprii cu parametru.

Observație. A doua integrală se poate calcula și prin metoda derivării sub semnul integral; concret, putem vedea $f(x) = f(x, b, c)$ și atunci $I = I(b, c) = \int_0^{\infty} f(x, b, c) dx$; derivăm în raport cu b (sau c) și procedăm ca la punctul a)

Problema 25

Folosind funcțiile lui Euler, să se calculeze integralele

a). $\int_1^{\infty} x^p (\ln x)^q dx$, $p < -1$, $q > -1$,

Caz particular $p = -m$, $q = n$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

b). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x dx$, $p, q > -1$.

Caz particular $p = 2m + 1$, $q = 2n + 1$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare. a). Facem substituția $\ln x = t$, adică facem schimbarea de variabilă $x = e^t : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$. Cu Teorema 7.4.8 de schimbare de variabilă într-o integrală improprie, avem

$$\int_1^{\infty} x^p (\ln x)^q dx = \int_0^{\infty} e^{pt} t^q e^t dt = \int_0^{\infty} e^{(p+1)t} t^q dt,$$

care, cu substituția $-(p+1)t = u$, $u \in [0, \infty)$, devine

$$\int_0^{\infty} e^{(p+1)t} t^q dt = \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{-u}{-(p+1)} \right)^q \frac{1}{-(p+1)} du = \frac{1}{(-(p+1))^{q+1}} \int_0^{\infty} u^q e^{-u} du.$$

Ca urmare, $\int_1^{\infty} x^p (\ln x)^q dx = \frac{1}{(-(p+1))^{q+1}} \Gamma(q+1)$.

În cazul particular dat, avem, ținând cont de Teorema 7.5.14,

$$\int_1^{\infty} x^p (\ln x)^q dx = \frac{1}{(m-1)^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{(m-1)^{n+1}},$$

b). Facem substituția $\sin x = t$, adică facem schimbarea de variabilă $x = \arcsin t : [0,1] \rightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$. Cu aceeași Teoremă ca mai sus, avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx = \int_0^1 t^p (\sqrt{1-t^2})^q \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 t^p (1-t^2)^{\frac{q-1}{2}} dt,$$

care, cu substituția $t^2 = u$, $u \in [0,1]$, devine

$$\int_0^1 t^p (1-t^2)^{\frac{q-1}{2}} dt = \int_0^1 u^{\frac{p}{2}} (1-u)^{\frac{q-1}{2}} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{p-1}{2}} (1-u)^{\frac{q-1}{2}} du.$$

Ca urmare,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right).$$

În cazul particular dat, avem, ținând cont de Teorema 7.5.15,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x \, dx = \frac{1}{2} B(m+1, n+1) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

Observație. Funcțiile lui Euler se pot găsi în §7.5/7.5.3. Teoremele 7.5.14 și 7.5.15 dau proprietăți ale funcțiilor Γ și B ale lui Euler.

Problema 26

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a).
$$\int_C (x - y + z) ds, C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}, t \in [0, 4\pi];$$

b).
$$\int_C ye^{2y} ds, C : y = \ln \cos x, x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}];$$

c).
$$\int_C (x + y) ds, C : x^2 + y^2 - 4 = 0, y \geq 0;$$

d).
$$\int_C (2x + 2y + z) ds, C$$
 fiind segmentul AB sau linia poligonală OBA, unde $A(1,2,-3)$, $B(-1,1,2)$;

e).
$$\int_C |xyz| ds, C : \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = h \end{cases}, R > 0, h > 0.$$

Rezolvare. Integralele sunt integrale curbilinii de speța întâi.

a). Determinăm mai întâi elementul de arc al curbei C, curbă dată printr-o reprezentare parametrică:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt = \\ &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt = \sqrt{2} dt. \end{aligned}$$

Acum, conform formulei de calcul a unei integrale curbilunii de speța întâi (dată în Teorema 8.1.2 și precizată exact în Remarca 8.1.2),

$$\begin{aligned} \int_C (x - y + z) ds &= \int_0^{4\pi} (\cos t - \sin t + t) \sqrt{2} dt = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin t + \cos t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{4\pi} = 8\sqrt{2}\pi^2. \end{aligned}$$

b). Determinăm mai întâi elementul de arc al curbei C, curbă dată prin ecuație explicită $y = f(x)$, unde $f(x) = \ln \cos x$:

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} dx = \frac{1}{|\cos x|} dx.$$

Acum, conform formulei de calcul a unei integrale curbilunii de speța întâi (dată în Teorema 8.1.2 și precizată exact în Remarca 8.1.2), avem, cu metoda integrării prin părți (vezi Remarca 7.1.8) și metoda schimbării de variabilă (vezi Remarca 7.1.10 și Remarca 7.1.11).

$$\begin{aligned} \int_C ye^{2y} ds &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \cos x (e^{2 \ln \cos x})}{|\cos x|} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln \cos x dx = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)' \ln \cos x dx = 2 \sin x \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \\ &- 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right) dx = \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) dx = \\ &= \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + \\ &+ \ln \frac{1+u}{1-u} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} + \ln \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{2}. \end{aligned}$$

c). Curba C este dată printr-o ecuație carteziană (vezi Definiția 5.9.7). Conform cu Propoziția 5.9.1 și cu cele spuse după ea, curba C poate fi dată și prin ecuații parametrice, dar și prin ecuație polară C :

$r = 2, \theta \in [0, \pi]$. Conform cu Remarca 8.1.2, elementul de arc al curbei C este $ds = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta = 2d\theta$. Acum, conform formulei de calcul a unei integrale curbilini de speța întâi (dată în Teorema 8.1.2 și precizată exact în Remarca 8.1.2) și formulei Leibniz–Newton din Teorema 7.1.8, avem:

$$\begin{aligned} \int_C (x + y) ds &= \int_0^{2\pi} (2\cos \theta + 2\sin \theta) 2d\theta = \\ &= 4(\sin \theta - \cos \theta) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

d). Pentru calculul integralei, avem nevoie de ecuațiile parametrice ale segmentului AB și apoi de ecuațiile parametrice ale segmentului OB . Acestea se obțin din ecuațiile dreptelor suport corespunzătoare. Astfel,

– ecuația dreptei AB este $AB : \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z+3}{2+3}$ și ne conduce la ecuațiile parametrice ale segmentului AB :

$$[AB] : \begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = 5t - 3 \end{cases}, t \in [0, 1].$$

– ecuația dreptei OB este $OB : \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ și ne conduce la ecuațiile parametrice ale segmentului OB :

$$[OB] : \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}, t \in [0, 1].$$

Ca și mai sus,

– elementul de arc al segmentului $[AB]$ este $ds = \sqrt{30}dt$,

– elementul de arc al segmentului $[OB]$ este $ds = \sqrt{6}dt$.

Acestea fiind zise, avem

$$\int_{[AB]} (2x + 2y + z) ds = \int_0^1 (-t + 3) \sqrt{30} dt = \frac{5\sqrt{30}}{2}.$$

Pentru calculul celei de a doua integrale, folosim proprietatea de aditivitate față de domeniul de integrare și independența față de orientarea pe curbă a integralei curbilini de speța întâi (vezi Teorema 8.1.4):

$$\int_{[OBA]} (2x + 2y + z) ds = \int_{[OB]} (2x + 2y + z) ds + \int_{[BA]} (2x + 2y + z) ds =$$

$$= \int_0^1 2t\sqrt{6}dt + \frac{5\sqrt{30}}{2} = t^2\sqrt{6} \Big|_0^1 + \frac{5\sqrt{30}}{2} = \sqrt{6} + \frac{5\sqrt{30}}{2}.$$

e). Curba C este dată ca intersecție a două suprafețe (vezi Definiția 5.9.14): prima este o suprafață cilindrică cu cercul director $x^2 + y^2 = R^2$ din planul xOy și cu generatoarele paralele cu axa Oz iar a doua este planul $z = h$, perpendicular pe Oz. Ca urmare, C este un cerc, și anume cercul din planul $z = h$ cu centrul în punctul $(0,0,h)$ și de rază R. Ecuațiile parametrice ale cercului C sunt

$$C : \begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \\ z = h \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Elementul de arc al cercului C este:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt = \\ &= \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R dt. \end{aligned}$$

Acum, conform formulei de calcul a unei integrale curbilini de speța întâi, dată în Teorema 8.1.2 (și precizată exact în Remarca 8.1.2), avem

$$\begin{aligned} \int_C |xyz| ds &= hR^3 \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t| dt = \\ &= \frac{1}{2} hR^3 \int_{-\pi}^{\pi} |\sin 2u| du = hR^3 \int_0^{\pi} |\sin 2u| du = \\ &= 2hR^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2v| dv = 2hR^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2v dv = 2hR^3. \blacksquare \end{aligned}$$

Observație. Pentru calculul unei integrale curbilini de speța întâi, se procedează astfel:

- se determină elementul de arc ds, corespunzător formei sub care este cunoscută curba pe care se calculează integrala: parametrică, explicită, polară (vezi §5.9/5.9.1, Remarca 8.1.2 și Remarca 8.1.4);
- se aplică formula de calcul corespunzătoare, folosind eventual și unele proprietăți ale integralei curbilini de speța întâi (vezi Teorema 8.1.2, Remarca 8.1.2, Remarca 8.1.4, Definiția 8.1.4).

Problema 27

Să se calculeze următoarele integrale curbilini:

a). $\int_C xy dx + y dy$, $C : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a, b > 0$;

b). $\int_C (x - 2y) dx + (2x + y) dy$, $C : y = x^2$, $x \in [-1, 2]$;

c). $\int_C x dx + (x + y) dy + (x + y - z) dz$, unde $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x + y \end{cases}$,

este parcursă în sensul invers acelor de ceasornic când se privește dinspre Oz pozitiv.

Rezolvare. Integralele sunt integrale curbilini de speța a doua.

a). Conform cu formula de calcul a unei integrale curbilini de speța a doua dată în Teorema 8.2.1 și precizată exact în Remarca 8.2.4, avem

$$\begin{aligned} \int_C xy dx + y dy &= \int_0^{2\pi} [a b \sin t \cos t (-a \sin t) + b \sin t (b \cos t)] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} [-a^2 b \sin^2 t \cos t + b^2 \sin t \cos t] dt = \\ &= -a^2 b \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} + b^2 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

b). Curba $C : y = x^2$, $x \in [-1, 2]$ este dată printr-o ecuație explicită și ca urmare, având în vedere formula de calcul a unei integrale curbilini de speța a doua (vezi Remarca 8.2.4 și Observația de mai jos),

$$\begin{aligned} \int_C (x - 2y) dx + (2x + y) dy &= \int_{-1}^2 [(x - 2x^2) + (2x + x^2)2x] dx = \\ &= \int_{-1}^2 [2x^3 + 2x^2 + x] dx = \left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^2 = 15. \end{aligned}$$

c). Curba $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x + y \end{cases}$ este curba de intersecție a două suprafețe: suprafața de ecuație $x^2 + y^2 = 1$, care este o suprafață cilindrică și suprafața de ecuație $z = x + y$, care este un plan. Având

în vedere reprezentarea parametrică a cercului director al cilindrului, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, o reprezentare parametrică a curbei C este $C : x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t + \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Se constată că această curbă este exact curba dată în enunț (și în ceea ce privește orientarea).

Acestea fiind zise, conform cu formula de calcul a unei integrale curbilini de speța a doua dată în Teorema 8.2.1 și precizată exact în Remarca 8.2.4, avem

$$\begin{aligned} & \int_C xdx + (x + y)dy + (x + y - z)dz = \\ & = \int_0^{2\pi} [\cos t(-\sin t) + (\cos t + \sin t)(\cos t)] dt = \\ & = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \left(\frac{2t + \sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \pi. \blacksquare \end{aligned}$$

Observație. Pentru calculul unei integrale curbilini de speța a doua, se procedează astfel:

- se determină o reprezentare parametrică a curbei pe care se calculează integrala (vezi §5.9/5.9.1);
- se aplică formula de calcul corespunzătoare, folosind eventual și proprietăți ale integralei curbilini de speța a doua (vezi Teorema 8.2.1, Remarca 8.2.4, Definiția 8.2.5).

Observație. Uneori, curba pe care se calculează integrala se poate da printr-o ecuație explicită $C : y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Ca urmare, o reprezentare parametrică a curbei C este $C : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$.

Problema 28

Se dă curba (numită cicloidă)

$$C : \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$a > 0$ fiind dat.

- a). Să se calculeze lungimea curbei;
- b). Să se calculeze aria domeniului plan limitat de curbă și axa Ox .

Rezolvare. a). Conform cu Teorema 5.9.1 (și Remarca 5.9.1), sau cu Teorema 8.1.4, lungimea curbei C este dată de formula $\ell_C = \int_C ds$, unde $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ este elementul de arc al curbei C (vezi Remarca 8.1.2).

Concret, avem

$$\begin{aligned} \ell_C &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 [(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2]} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

Așadar, lungimea curbei C este $\ell_C = 8a$.

b). Să presupunem că C are ecuația carteziană (explicită) $y = f(x)$, $x \in [0, 2\pi a]$. Atunci, aria domeniului plan limitat de curbă și axa Ox

este dată de binecunoscuta formulă $\mathcal{A} = \int_0^{2\pi a} f(x) dx$.

Concret, calculăm această integrală cu schimbarea de variabilă

$$x = a(t - \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ca urmare, $f(x) = f(a(t - \sin t)) = y(t) = a(1 - \cos t)$ și $x'(t) = a(1 - \cos t)$.

Așadar,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^{2\pi a} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(a(t - \sin t)) \cdot a(1 - \cos t) dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}) dt = \\ &= a^2 \left(t + 2 \sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

Așadar, aria domeniului plan limitat de curbă și axa Ox este $\mathcal{A} = 3\pi a^2$.

Altfel, aria domeniului plan limitat de curbă și axa Ox se poate cal-

cula cu formula $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} -y dx + x dy$, unde Γ este curba obținută prin juxtapunerea curbei C și a segmentului de dreaptă OA de pe axa Ox pe care curba C se sprijină (evident, $O(0,0)$, $A(2\pi a, 0)$), orientată pozitiv față de domeniul compact pe care îl limitează.

Având în vedere proprietățile integralei curbilinii, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_{OA} -y dx + x dy - \frac{1}{2} \int_C -y dx + x dy = \\ &= 0 - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-a(1 - \cos t)a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)a \sin t] dt = 3\pi a^2, \end{aligned}$$

după cum ușor se poate constata.

Problema 29

Fie \mathcal{E} elipsa cu centrul în originea sistemului ortogonal de coordonate carteziene xOy , de semiaxe 5 și 2. Se cere:

i). Să se scrie ecuațiile parametrice ale elipsei \mathcal{E} dacă aceasta este parcursă o singură dată:

- în sens trigonometric,
- în sens invers trigonometric.

ii). Să se scrie ecuațiile tangentei și normalei la elipsa \mathcal{E} în punctul ei de intersecție cu dreapta de ecuație $y = x$, situat în primul cadran.

iii). Fie (\mathcal{E}) domeniul din planul \mathbb{R}^2 limitat de elipsa \mathcal{E} și fie S segmentul închis $[OA]$, unde $A(5,0)$. Să se determine o transformare regulată surjectivă astfel încât

$$T : (a,b) \times (c,d) \rightarrow (\mathcal{E}) \setminus S$$

Rezolvare. Ecuația carteziană a elipsei \mathcal{E} de semiaxe 5 și 2 este

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

i). ecuațiile parametrice ale elipsei \mathcal{E} dacă aceasta este parcursă o singură dată:

- în sens trigonometric, sunt $\mathcal{E} : \begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$
- în sens invers trigonometric, sunt (înlocuind în reprezentarea anterioară pe t cu $2\pi - t$) $\mathcal{E} : \begin{cases} x = 5 \cos t \\ y = -2 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

(vezi Definiția 5.9.6 a unei curbe orientate și Definiția 5.9.1 a opusului unui drum).

ii). În general, coordonatele punctelor de intersecție a două curbe se află rezolvând sistemul format din ecuațiile celor două curbe; aici, sistemul este $\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = x \end{cases}$ și are soluția $A(\frac{10}{\sqrt{29}}, \frac{10}{\sqrt{29}})$.

De aici și cu Remarca 5.9.4,

- ecuația tangentei în A la elipsă este $\frac{x}{25} + \frac{y}{4} - \frac{\sqrt{29}}{10} = 0$;
- ecuația normalei în A la elipsă este $25x - 4y - \frac{210}{\sqrt{29}} = 0$.

iii). Având în vedere cele spuse în §5.6 privind Transformările regulate (vezi și Exemplul 5.6.1), transformarea regulată surjectivă cerută este $T : (0,1) \times (0,2\pi) \rightarrow (\mathcal{E}) \setminus S$, definită prin

$$T(\rho, \theta) = (x, y) \iff \begin{cases} x = 5\rho \cos \theta \\ y = 2\rho \sin \theta \end{cases} \cdot \blacksquare$$

Observație. Reamintim că elipsa este mulțimea punctelor din plan care au proprietatea că suma distanțelor la două puncte fixe este constantă.

Alegem sistemul de coordonate astfel: cele două puncte fixe (numite focare, notate F_1, F_2) determină axa absciselor iar mediatoarea segmentului F_1F_2 este axa ordonatelor. Sistemul se alege direct orientat. Scriind că punctul curent $M(x, y)$ al elipsei verifică condiția $MF_1 + MF_2 = 10$ (axa mare a elipsei) se obține ecuația carteziană a elipsei \mathcal{E} de semiaxe 5 și 2: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$. Acum, focarele sunt $F_1(-\sqrt{21}, 0)$ și $F_2(\sqrt{21}, 0)$.

Observație. În general, pentru elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ și punctul $P_0(x_0, y_0)$ al său, avem

- ecuația tangentei în P_0 la elipsă este $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$;
- ecuația normalei în P_0 la elipsă este $a^2y_0(x-x_0) - b^2x_0(y-y_0) = 0$.

Problema 30

Să se calculeze următoarele integrale duble:

- $\iint_D \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} dx dy$, unde $D = [-1, 1] \times [0, 4]$;
- $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$, D fiind domeniul compact plan limitat de curbele:
 - $y = x, xy = 1, x = 2$ sau
 - $y = x, xy = 1, x = 3, y = 2$.
- $\iint_D (x-1) dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x \leq y\}$.

Rezolvare. a). Domeniul D este un interval bidimensional iar funcția $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$ este continuă pe acest domeniu, ca o compunere de astfel de funcții (vezi Teorema 4.2.6, Exemplul 4.2.10) Conform Corolarului 9.4.1, în calculul integralei duble din enunț nu contează ordinea de iterare:

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} dy$$

sau

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} dx dy = \int_0^4 dy \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} dx,$$

după dorință.

În prima variantă, se constată că în calculul integralei interioare

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} dy \text{ apar unele probleme.}$$

În a doua variantă, avem $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} dx = 0$, pentru că funcția de sub integrală este impară în x .

Acum, este clar că $\iint_D \frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} dx dy = 0$.

b). În cazul i) se constată cu ușurință că

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\}.$$

Conform cu Propoziția 9.4.1, D este un domeniu compact măsurabil Jordan din \mathbb{R}^2 , simplu în raport cu axa Oy . Cum funcția $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2}$ este continuă pe D , din Teorema 9.4.3 (împreună cu Remarca 7.5.3)

rezultă că are loc egalitatea $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{y^2}{x^2} dy$.

Calculăm integrala interioară: $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{y^2}{x^2} dy = \frac{y^3}{3x^2} \Big|_{\frac{1}{x}}^x = \frac{x}{3} - \frac{1}{3x^5}$.

Integrala exterioară este $\int_1^2 \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3x^5} \right) dx = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{1}{12x^4} \right) \Big|_1^2 = \frac{27}{64}$.

În concluzie, $\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy = \frac{27}{64}$.

În cazul ii) se constată cu ușurință că $D = D_1 \cup D_2$, unde

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3, \frac{1}{x} \leq y \leq 2\},$$

cele două mulțimi având interioarele disjuncte.

Conform cu Propoziția 9.4.1, D_1 și D_2 sunt domenii compacte măsurabile Jordan din \mathbb{R}^2 , simple în raport cu axa Oy. Cum funcția $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2}$ este continuă pe D, din Teorema 9.4.3 (împreună cu Remarca 7.5.3) combinată cu Proprietatea de aditivitate de domeniu a integralei duble (vezi Teorema 9.3.4) rezultă că are loc egalitatea

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy = \iint_{D_1} \frac{y^2}{x^2} dx dy + \iint_{D_2} \frac{y^2}{x^2} dx dy$$

și ca urmare,

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy &= \frac{27}{64} + \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 \frac{y^2}{x^2} dy = \frac{27}{64} + \int_2^3 \left(\frac{y^3}{3x^2} \Big|_{\frac{1}{x}}^2 \right) dx = \\ &= \frac{27}{64} + \int_2^3 \left(\frac{8}{3x^2} - \frac{1}{3x^5} \right) dx = \frac{27}{64} + \left(-\frac{8}{3x} + \frac{1}{12x^4} \right) \Big|_2^3 = \frac{419}{486}. \end{aligned}$$

c). Domeniul de integrat D este un segment de cerc, limitat de semicercul de ecuație $x = 1 - \sqrt{1-y^2}$ și dreapta de ecuație $y = x$. Acest domeniu este simplu în raport cu fiecare din axele de coordonate (vezi mai jos). Reținem pe D simplu în raport cu axa Ox:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 1 - \sqrt{1-y^2} \leq x \leq y\}$$

Conform cu Propoziția 9.4.2, D este un domeniu compact măsurabil Jordan din \mathbb{R}^2 , simplu în raport cu axa Ox. Cum funcția $f(x,y) = x - 1$ este continuă pe D, din Teorema 9.4.4 (împreună cu Remarca 7.5.3) rezultă că are loc egalitatea

$$\iint_D (x-1) dx dy = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^y (x-1) dx.$$

Ca urmare,

$$\begin{aligned} \iint_D (x-1) dx dy &= \int_0^1 \left[\frac{(x-1)^2}{2} \Big|_{1-\sqrt{1-y^2}}^1 \right] dy = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{(y-1)^2}{2} - \frac{1-y^2}{2} \right] dy = \int_0^1 (y^2 - y) dy = -\frac{1}{6}. \blacksquare \end{aligned}$$

Observație. În calculul unei integrale duble pe un domeniu dreptunghiular a unei funcții continue, nu contează ordinea de integrare. Aceasta are importanță în ceea ce privește complexitatea calculului (vezi Corolarul 9.4.1 și Remarca 9.4.3).

Observație. În calculul unei integrale duble pe un domeniu care nu este dreptunghiular, se recomandă reprezentarea grafică a domeniului. Această reprezentare permite stabilirea cu ușurință dacă domeniul de integrat este simplu în raport cu una din axele de coordonate și reprezentarea sa ca în una din Propozițiile 9.4.1 sau 9.4.2. Se aplică apoi formula de calcul corespunzătoare pentru calculul integralei duble (din Teorema 9.4.3 respectiv Teorema 9.4.4).

Dacă domeniul D pe care se cere să se calculeze integrala dublă

$\iint_D f(x,y) dx dy$ nu este simplu în raport cu nici una din axele de coordonate, atunci, prin paralele la axele de coordonate, se descompune

D într-un număr finit de subdomenii compacte măsurabile Jordan D_1, D_2, \dots, D_m , având interioarele disjuncte două câte două, fiecare fiind simplu în raport cu una din axele de coordonate: $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$.

Folosind apoi proprietatea de ereditate și aditivitate de domeniu a integralei duble (vezi Teorema 9.3.4), avem

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^m \iint_{D_i} f(x,y) dx dy.$$

Aici, este clar că fiecare din integralele $\iint_{D_i} f(x,y) dx dy$ se calculează

așa cum am spus mai sus. Precizăm că chiar dacă domeniul D este simplu în raport cu una din axele de coordonate dar frontiera sa este mai complicată, se preferă o descompunere ca mai sus, așa cum s-a procedat în rezolvarea de la pc. b) / ii).

Problema 31

Folosind metoda schimbării de variabilă, să se calculeze următoarele integrale duble:

a). $\iint_D (x - y) dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, y \geq \max\{x, 0\}\}$;

b). $\iint_D \sqrt[3]{\left(5 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\right)^{-1}} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 4\}$;

c). $\iint_D (1 + xy) dx dy$, D fiind compactul plan limitat de curbele de

ecuații $y = x^2$, $2y = x^2$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$

Rezolvare. a). Domeniul D este limitat de semicercul de ecuație $y = \sqrt{1 - x^2}$, de segmentul de dreaptă AO de pe axa Ox , $A(-\sqrt{2}, 0)$ și de segmentul de dreaptă OB de pe bisectoarea $y = x$, unde $B(1, 1)$. Se constată cu ușurință că domeniul D este simplu în raport cu fiecare din axele de coordonate. Iterarea integralei duble necesită însă descompunerea lui D în două subdomenii convenabil alese, ceea ce complică lucrurile. Se evită toate aceste inconveniente folosind metoda schimbării de variabilă. Faptul că D este limitat de un arc de cerc și de semidrepte ce trec prin origine, sugerează trecerea la coordonate polare.

Pentru aceasta, considerăm transformarea

$$T : \Delta \rightarrow D, T(\rho, \theta) = (x, y) \iff \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

și determinăm pe Δ astfel încât $T(\Delta) = D$, adică T să fie surjectivă.

Pentru aceasta, înlocuim expresiile lui x și y în inecuațiile ce definesc domeniul D , $\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \leq 2$, $\rho \sin \theta \geq \max\{\rho \cos \theta, 0\}$

și rezolvăm sistemul de inecuații obținut, necunoscutele fiind ρ și θ .

De aici rezultă $\rho \in [0, \sqrt{2}]$ și $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$.

Exact vorbind, transformarea punctuală

$$T : \Delta \rightarrow D, T(\rho, \theta) = (x, y) \iff \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases},$$

este regulată pe $\Delta = [0, \sqrt{2}] \times [\frac{\pi}{4}, \pi]$ și surjectivă. Reamintim că

$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho$ (vezi Exemplul 5.6.1). Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala dublă (vezi Teorema 9.4.5), avem

$$\begin{aligned}
\iint_D (x-y) dx dy &= \iint_{\Delta} (\rho \cos \theta - \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\theta (\cos \theta - \sin \theta) \rho^2 d\theta = \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 (\sin \theta + \cos \theta) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} d\rho = \\
&= - \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 (1 + \sqrt{2}) d\rho = -(1 + \sqrt{2}) \frac{2\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

b). Domeniul D este limitat la interior de elipsa de ecuație $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ iar la exterior de elipsa de ecuație $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4$. O reprezentare a sa ne arată că el nu este simplu în raport cu nici una din axele de coordonate. Iterarea integralei duble necesită descompunerea lui D în patru subdomenii convenabil alese, ceea ce complică calculele. Se evită toate aceste inconveniente folosind metoda schimbării de variabilă. Faptul că D este limitat de elipse, sugerează trecerea la coordonate polare generalizate. Pentru aceasta, considerăm transformarea punctuală

$$T : \Delta \rightarrow D, T(\rho, \theta) = (x, y) \iff \begin{cases} x = 3\rho \cos \theta \\ y = 2\rho \sin \theta \end{cases},$$

care este regulată pe $\Delta = [1, 2] \times [0, 2\pi]$ și surjectivă. Reamintim că $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = 6\rho$ (vezi Exemplitul 5.6.1). Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala dublă (vezi Teorema 9.4.5), avem

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt[3]{\left(5 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\right)^{-1}} dx dy &= \iint_{\Delta} \sqrt[3]{\left(5 - \frac{9\rho^2 \cos^2 \theta}{9} - \frac{4\rho^2 \sin^2 \theta}{4}\right)^{-1}} 6\rho d\rho d\theta = \\
&= 6 \iint_{\Delta} \sqrt[3]{(5 - \rho^2)^{-1}} \rho d\rho d\theta = 6 \int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} \sqrt[3]{(5 - \rho^2)^{-1}} \rho d\theta = \\
&= 12\pi \int_1^2 \sqrt[3]{(5 - \rho^2)^{-1}} \rho d\rho
\end{aligned}$$

Aceasta este o integrală binomială, astfel că se impune substituția $5 - \rho^2 = t^3$ (vezi §7.2/7.2.3/VI). Aceasta înseamnă că în calculul acestei integrale aplicăm a doua formulă de schimbare de variabilă (vezi Teorema 7.1.10 și Remarca 7.1.11) folosind funcția (schimbarea de variabilă) $\rho = \sqrt[3]{5 - t^3} : [1, \sqrt[3]{4}] \rightarrow [1, 2]$.

$$\text{Aşadar, } \int_1^2 \sqrt[3]{(5 - \rho^2)^{-1}} \rho d\rho = \int_{\sqrt[3]{4}}^1 \sqrt[3]{t^{-3}} \sqrt{5 - t^3} \frac{-3t^2}{2\sqrt{5 - t^3}} dt = \frac{3}{2} \int_1^{\sqrt[3]{4}} t dt =$$

$$\frac{3}{4} t^2 \Big|_1^{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{4} (2\sqrt[3]{2} - 1).$$

$$\text{Cu aceasta, } \iint_D \sqrt[3]{\left(5 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\right)^{-1}} dx dy = 9\pi (2\sqrt[3]{2} - 1).$$

c). Domeniul D limitat de cele patru curbe – parabole – este un patrulater curbiliniu. O reprezentare a sa ne arată că el este simplu în raport cu fiecare din axele de coordonate. Iterarea integralei duble necesită descompunerea lui D în trei subdomenii convenabil alese, ceea ce complică lucrurile. Se evită toate aceste inconveniente folosind metoda schimbării de variabilă.

Ecuatiile parabolilor care mărginesc domeniul D sugerează schimbarea de variabilă dată de transformarea punctuală

$$T : D \rightarrow \Delta, T(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} u = \frac{v}{x^2} \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases}.$$

Se constată cu ușurință că T este injectivă (vezi Definiția 1.2.9) și că $T(D) = [\frac{1}{2}, 1] \times [1, 2]$. Transformarea inversă

$$T^{-1} : \Delta = [\frac{1}{2}, 1] \times [1, 2] \rightarrow D,$$

$$T^{-1}(u,v) = (x,y) \iff \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} \\ y = \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}} \end{cases}$$

este regulată pe Δ și surjectivă.

În plus, avem că $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{3u^2}$ (vezi Definiția 5.6.1).

Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala dublă (vezi Teorema 9.4.5), avem

$$\iint_D (1 + xy) dx dy = \iint_{\Delta} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{v}{u^2}} \sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}\right) \left|-\frac{1}{3u^2}\right| du dv =$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Delta} \left(\frac{1}{u^2} + \frac{v}{u^3}\right) du dv = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_1^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{v}{u^3}\right) dv =$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{v}{u^2} + \frac{v^2}{2u^3}\right) \Big|_1^2 du = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{3}{2u^3}\right) du =$$

$$= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{u} + \frac{3}{4u^2} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{13}{12}. \blacksquare$$

Observație. În calculul unei integrale duble cu formula de schimbare de variabilă, găsirea lui T constituie problema esențială. Găsirea transformării T urmărește ca integrala dublă pe Δ să poată fi calculată cât mai ușor, adică Δ trebuie să fie simplu în raport cu una din axele de coordonate. Ca urmare, găsirea lui T este dictată în general de ecuațiile curbelor care formează frontiera lui D .

Problema 32

Să se calculeze următoarele integrale triple:

a). $\iiint_{\Omega} \sin(x+y+z) dx dy dz, \Omega = [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, \frac{\pi}{4}];$

b). $\iiint_{\Omega} (x+y+z) dx dy dz, \Omega$ fiind domeniul compact din spațiu limitat de suprafețele de ecuații $x = z^2, z = x^2, y = xz, y = 0;$

c). $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dx dy dz, \Omega$ fiind domeniul compact din spațiu limitat de suprafețele de ecuații $x^2 = y^2 + z^2, x=1$

Rezolvare. a). Domeniul Ω este un interval tridimensional iar funcția $f(x,y,z) = \sin(x+y+z)$ este continuă pe acest domeniu, fiind o compunere de astfel de funcții (funcția trigonometrică sinus și o funcție polinomială – vezi Teorema 4.2.6, Exemplul 4.2.10) . Conform Corolarului 9.5.1, în calculul integralei duble din enunț nu contează ordinea de iterare. De exemplu, putem scrie

$$\iiint_{\Omega} \sin(x+y+z) dx dy dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y+z) dz.$$

Calculăm prima integrală interioară: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y+z) dz =$

$$= [-\cos(x+y+z)] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \cos(x+y) - \cos(x+y+\frac{\pi}{4}).$$

Calculăm a doua integrală interioară: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos(x+y) - \cos(x+y+\frac{\pi}{4})] dy$

$$= [\sin(x+y) - \sin(x+y + \frac{\pi}{4})] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sin(x+\frac{\pi}{4}) - \sin(x+\frac{\pi}{2}) - \sin x.$$

În sfârșit, calculăm integrala exterioară:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \sin(x + \frac{\pi}{2}) - \sin x] dx = \\ & = [-2\cos(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \cos x] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ & = \cos(3\frac{\pi}{4}) + 3\cos\frac{\pi}{4} - 1 = \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Așadar, $\iiint_{\Omega} \sin(x+y+z) dx dy dz = \sqrt{2} - 1.$

b). Se constată că Ω este un domeniu din spațiul \mathbb{R}^3 limitat de suprafețele cilindrice de ecuații $x = z^2$, $z = x^2$ (cu generatoarele paralele cu axa Oy), de paraboloidul de ecuație $y = xz$ și de planul de ecuație $y = 0$ (planul xOz).

Fie D proiecția domeniului Ω pe planul xOz :

$$D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq z \leq \sqrt{x}\}$$

Se constată că $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,z) \in D, 0 \leq y \leq xz\}$.

Se vede de aici că Ω verifică condițiile din Propoziția 9.5.1 iar funcția $f(x,y,z) = x + y + z$ este continuă pe Ω , ca funcție polinomială – vezi Exemplul 4.2.10. Ca urmare, sunt verificate condițiile din Teorema 9.5.2 (vezi și Remarca 7.5.3) și atunci

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} (x+y+z) dx dy dz = \iint_D dx dz \int_0^{xz} (x+y+z) dy = \\ & = \iint_D \left[(x+z)y + \frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^{xz} dx dz = \iint_D \left((x+z)xz + \frac{x^2z^2}{2} \right) dx dz. \end{aligned}$$

Deoarece D este simplu în raport cu axa Oz , avem

$$\begin{aligned} & \iint_D \left((x+z)xz + \frac{x^2z^2}{2} \right) dx dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(x^2z + xz^2 + \frac{x^2z^2}{2} \right) dz = \\ & = \int_0^1 \left[\left(\frac{x^2z^2}{2} + \frac{xz^3}{3} + \frac{x^2z^3}{6} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right] dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}(x - x^4) + \frac{x}{3}(x\sqrt{x} - x^6) + \frac{x^2}{6}(x\sqrt{x} - x^6) \right] dx = \frac{95}{756}.$$

Așadar,
$$\iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz = \frac{95}{756}.$$

c). Se constată că Ω este un domeniu din spațiul \mathbb{R}^3 limitat de suprafața conică de ecuație $x^2 = y^2 + z^2$ și de planul de ecuație $x = 1$. Cele două suprafețe se intersectează după cercul

$$C : \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

și ca urmare, domeniul Ω se proiectează pe planul yOz în discul

$$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Acum, vedem pe Ω ca fiind

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in D, \sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 1 \right\}$$

Se vede de aici că Ω verifică condițiile din Propoziția 9.5.1 iar funcția $f(x,y,z) = (y^2 + z^2)x$ este continuă pe Ω , ca funcție polinomială – vezi Exemplitul 4.2.10. Ca urmare, sunt verificate condițiile din Teorema 9.5.2 (vezi și Remarca 7.5.3) și atunci

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)x dx dy dz &= \iint_D dy dz \int_{\sqrt{y^2 + z^2}}^1 (y^2 + z^2)x dx = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[(y^2 + z^2)x^2 \Big|_{\sqrt{y^2 + z^2}}^1 \right] dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (y^2 + z^2)(1 - (y^2 + z^2)) dy dz. \end{aligned}$$

Deoarece D este, în planul yOz , un disc cu centrul în origine iar funcția de sub integrală conține grupul $y^2 + z^2$, este indicat ca în calculul integralei duble să se treacă la coordonate polare, prin formulele $\begin{cases} y = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \end{cases}$, $(\rho, \theta) \in \Delta = [0,1] \times [0,2\pi]$ (vezi Exemplitul 5.6.1 și Teorema 9.4.5):

$$\iint_D (y^2 + z^2)(1 - (y^2 + z^2)) dy dz = \iint_{\Delta} \rho^3 (1 - \rho^2) d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^3(1 - \rho^2)d\theta = 2\pi \int_0^1 \rho^3(1 - \rho^2)d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

Așadar, $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{\pi}{12}$. ■

Observație. În calculul unei integrale triple pe un interval tridimensional a unei funcții continue, nu contează ordinea de integrare. Aceasta are importanță în ceea ce privește complexitatea calculului (vezi Corolarul 9.5.2 și Remarca 9.5.4).

Observație. În calculul unei integrale triple pe un domeniu care nu este interval tridimensional, se recomandă reprezentarea grafică a domeniului. Această reprezentare permite stabilirea cu ușurință dacă domeniul de integrat este simplu în raport cu una din axele de coordonate și reprezentarea sa ca în una din Propozițiile 9.5.1 sau analogele ei. Se aplică apoi formula de calcul corespunzătoare pentru calculul integralei triple, conform cu Teorema 9.5.2 și analogele ei (vezi Remarca 9.5.4).

Dacă domeniul Ω pe care se calculează integrala triplă $\iiint_{\Omega} f(x,y) dx dy$

nu este simplu în raport cu nici una din axele de coordonate, atunci se descompune Ω într-un număr finit de subdomenii compacte măsurabile Jordan $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$, având interioarele disjuncte două câte două, fiecare fiind simplu în raport cu una din axele de coordonate:

$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ (de exemplu, ducând plane paralele cu o axă de coordonate sau suprafețe cilindrice cu generatoarele paralele cu o axă de coordonate). Folosind apoi proprietatea de ereditate și aditivitate de domeniu a integralei triple (vezi Teorema 9.3.4), avem

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz = \sum_{i=1}^m \iiint_{\Omega_i} f(x,y,z) dx dy dz.$$

Fiecare din integralele $\iiint_{\Omega_i} f(x,y,z) dx dy dz$ se calculează ca mai sus.

Precizăm că chiar dacă domeniul Ω este simplu în raport cu una din axele de coordonate dar frontiera sa este mai complicată, se preferă o descompunere ca mai sus.

Problema 33

Folosind metoda schimbării de variabilă, să se calculeze următoarele integrale triple:

a). $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, Ω fiind domeniul compact din spațiu

limitat de suprafețele de ecuații $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$ și $z = 3$;

b). $\iiint_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, Ω fiind domeniul compact din

spațiu limitat de suprafețele $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

c). $\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz$, Ω fiind domeniul compact din spațiu limitat de

suprafața de ecuație $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$;

Rezolvare. a). Domeniul Ω este limitat de suprafața cilindrică de ecuație $x^2 + y^2 = 2x$ și de planele de ecuații $z = 0$ și $z = 3$.

Se constată că Ω are reprezentarea

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq 3\}.$$

Funcția $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$ este continuă Ω .

Trecem la coordonate cilindrice, adică considerăm transformarea punctuală

$$T : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$T(\rho, \theta, z) = (x, y, z), \text{ unde } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}.$$

Se știe că $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho$ (vezi Exemplul 5.6.2). Pentru a determina domeniul $\Omega_0 \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$ pentru care $T(\Omega_0) = \Omega$, introducem expresiile lui x , y , z în inecuațiile ce definesc pe Ω . Obținem $\rho^2 \leq 2\rho \cos \theta$, $0 \leq z \leq 3$, de unde rezultă $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \rho \leq 2\cos \theta$ și $0 \leq z \leq 3$ (periodicitatea funcției cosinus ne permite să luăm pentru θ intervalul de variație $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, în loc de $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$). Luând

$$\Omega_0 = \{(\rho, \theta, z) \mid \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], 0 \leq \rho \leq 2\cos \theta, 0 \leq z \leq 3\},$$

se constată că $T(\Omega_0) = \Omega$ și că T este transformare regulată pe Ω_0 (de fapt, pe interiorul lui Ω_0).

Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala triplă (vezi Teorema 9.5.3), avem

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega_0} z\sqrt{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \rho d\rho d\theta dz = \\
&= \iiint_{\Omega_0} z\rho^2 d\rho d\theta dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} d\rho \int_0^3 z\rho^2 dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \frac{z^2}{2} \rho^2 \Big|_0^3 d\rho = \\
&= \frac{3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^3 \Big|_0^{2 \cos \theta} \right) d\theta = 12 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta) d\theta = \\
&= 6 \left(\frac{1}{3} \sin 3\theta + 3 \sin \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 16.
\end{aligned}$$

b). Domeniul Ω este limitat de sferele de ecuații

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ și } x^2 + y^2 + z^2 = 4;$$

așadar, Ω este o coroană sferică a cărei reprezentare este

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

și nu este simplu în raport cu nici una din axele de coordonate.

Funcția $f(x,y,z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$ este continuă pe Ω .

Faptul că Ω este limitat de sfere (dar și prezența grupului $x^2 + y^2 + z^2$ sub integrală) sugerează să trecem la coordonate sferice.

Așadar, considerăm transformarea punctuală

$$T : [1,2] \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$T(\rho, \theta, \varphi) = (x,y,z), \text{ unde } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}.$$

Se știe că (vezi Exemplul 5.6.2) $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2 \sin \varphi$, T este transformare regulată pe $\Omega_0 = [1,2] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$ (de fapt, pe interiorul lui Ω_0) și $T(\Omega_0) = \Omega$.

Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala triplă (vezi Teorema 9.5.3), avem, ținând seama că $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$,

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \iiint_{\Omega_0} \sqrt{1 + \rho^2} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi = \\
&= \int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \rho^2} \rho^2 \sin \varphi d\varphi =
\end{aligned}$$

$$= - \int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{1 + \rho^2} \rho^2 \cos \varphi \right) \Big|_0^\pi d\theta = 4\pi \int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2} \rho^2 d\rho.$$

Această ultimă integrală se calculează prin părți:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2} \rho^2 d\rho &= \int_1^2 \frac{(1 + \rho^2)\rho^2}{\sqrt{1 + \rho^2}} d\rho = \int_1^2 \rho (1 + \rho^2) \left(\sqrt{1 + \rho^2} \right)' d\rho = \\ &= \rho (1 + \rho^2) \sqrt{1 + \rho^2} \Big|_1^2 - \int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2} (1 + 3\rho^2) d\rho = \\ &= 10\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - \int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho - 3 \int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2} \rho^2 d\rho \end{aligned}$$

și de aici avem

$$\int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2} \rho^2 d\rho = \frac{1}{4} (10\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{4} \int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho.$$

La fel, această ultimă integrală se calculează tot prin părți:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho &= \int_1^2 \frac{1 + \rho^2}{\sqrt{1 + \rho^2}} d\rho = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}} d\rho + \int_1^2 \rho \left(\sqrt{1 + \rho^2} \right)' d\rho = \\ &= \ln \left(\rho + \sqrt{1 + \rho^2} \right) \Big|_1^2 + \rho \sqrt{1 + \rho^2} \Big|_1^2 - \int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln \left(\rho + \sqrt{1 + \rho^2} \right) + \rho \sqrt{1 + \rho^2} \right] \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}} + \sqrt{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Așadar, $\int_1^2 \sqrt{1 + \rho^2} \rho^2 d\rho = \frac{9}{4}\sqrt{5} - \frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8} \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}$ și ca urmare,

$$\iiint_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \pi \left[9\sqrt{5} - \frac{3}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}} \right].$$

c). Domeniul Ω este limitat de elipsoidul de ecuație $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Așadar, $\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\}$, iar funcția $f(x, y, z) = x^2$ este continuă Ω .

Trecem la coordonate sferice generalizate, adică considerăm transformarea punctuală $T : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T(\rho, \theta, \varphi) = (x, y, z), \text{ unde } \begin{cases} x = 5\rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = 4\rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = 2\rho \cos \varphi \end{cases} .$$

Se știe că (vezi Exemplitul 5.6.2) $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = 40\rho^2 \sin \varphi$. Pentru a determina domeniul $\Omega_0 \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ pentru care $T(\Omega_0) = \Omega$, introducem expresiile lui x, y, z în inecuația ce definește pe Ω . Obținem $\rho^2 \leq 1$, de unde rezultă $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$. Luând $\Omega_0 = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, se constată că $T(\Omega_0) = \Omega$ și că T este transformare regulată pe Ω_0 (de fapt, pe interiorul lui Ω_0). Conform formulei de schimbare de variabilă în integrala triplă (vezi Teorema 9.5.3), avem

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz &= 1000 \iiint_{\Omega_0} \rho^4 \cos^2 \theta \sin^3 \varphi d\rho d\theta d\varphi = \\ &= 1000 \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \rho^4 \cos^2 \theta \sin^3 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Deoarece } \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi) d\varphi = \frac{4}{3}, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \pi \text{ și } \int_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

avem în final $\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \frac{800}{3} \pi$. ■

Observație. În calculul unei integrale triple cu formula de schimbare de variabilă, găsirea lui T constituie problema esențială. Găsirea transformării T urmărește ca integrala triplă pe Ω_0 să poată fi calculată cât mai ușor, adică Ω_0 trebuie să fie simplu în raport cu una din axele de coordonate. Ca urmare, găsirea lui T este dictată în general de ecuațiile suprafețelor care formează frontiera lui Ω .

Problema 34

Fie suprafața Σ cu ecuația carteziană $z = x^2 + y^2$. Se cere:

- i). Să se precizeze denumirea sa.
- ii). Să se dea o reprezentare parametrică a suprafeței.
- iii). Să se dea o ecuație vectorială a suprafeței.

iv). Să se dea ecuația planului tangent și a normalei la suprafața Σ în punctul $P(0,2,4)$.

v). Să se determine distanța de la origine la acest plan tangent.

vi). Să se precizeze versorul normalei la fiecare față a suprafeței.

Rezolvare. i). Suprafața $\Sigma : z = x^2 + y^2$ este un paraboloid de rotație.

ii). Dăm două reprezentări parametrice ale suprafeței Σ :

$$\Sigma_1 : x = u, y = v, z = u^2 + v^2, (u,v) \in \mathbb{R}^2,$$

respectiv

$$\Sigma_2 : x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2, (u,v) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi].$$

Se constată ușor că cele două reprezentări parametrice sunt echivalente (vezi Definiția 5.9.10).

iii). Fiecare reprezentare parametrică conduce la o ecuație vectorială a suprafeței Σ (vezi cele spuse după Exemplul 5.9.7):

$$\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + v^2)\vec{k}, (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

respectiv

$$\vec{r} = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + u^2 \vec{k}, (u,v) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi].$$

iv). Planul tangent în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la suprafața Σ are ecuația $z - z_0 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$, (vezi mai jos). Concret, planul tangent în punctul $P(0,2,4)$ la Σ are ecuația $4y - z - 4 = 0$ (un plan paralel cu axa Ox).

Normala în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la $\Sigma : z = x^2 + y^2$ are ecuația

$$\frac{x - x_0}{-2x_0} = \frac{y - y_0}{-2y_0} = \frac{z - z_0}{1},$$

(vezi mai jos). Concret, normala în $P(0,2,4)$ la Σ are ecuația

$$\frac{x}{0} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z - 4}{1},$$

sau, altfel, $\begin{cases} x = 0 \\ y + 4z - 18 = 0 \end{cases}$, adică o dreaptă din planul yOz .

v). Conform unei formule cunoscute (vezi mai jos), distanța de la origine la planul tangent de mai sus este $d = \frac{|-4|}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

vi). Versorul normalei la fiecare față a suprafeței Σ în punctul curent (x,y,z) , este

$$\vec{n} = \frac{-2x}{\pm\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\vec{i} + \frac{-2y}{\pm\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\vec{j} + \frac{1}{\pm\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\vec{k}$$

semnul "+" în fața acestor radicali corespunde feței superioare în raport cu Oz (versorul normalei la această față formează un unghi ascuțit cu versorul \vec{k} al axei Oz), iar semnul "-" în fața radicalilor corespunde feței inferioare în raport cu Oz (versorul normalei la această față formează un unghi obtuz cu versorul \vec{k} al axei Oz). ■

Observație. În general, planul tangent în $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la suprafața $\Sigma : z = f(x, y)$ are ecuația

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Normala la suprafața $\Sigma : z = f(x, y)$ în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ are ecuația

$$\frac{x - x_0}{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}.$$

Versorul normalei la fiecare față a suprafeței $\Sigma : z = f(x, y)$, în punctul curent (x, y, z) , este

$$\vec{n} = \frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}\vec{i} + \frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}\vec{j} + \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}\vec{k},$$

unde $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ și $q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sunt notațiile lui Monge. Semnul "+" în fața acestor radicali caracterizează o față a suprafeței Σ , numită față superioară în raport cu Oz (în acest caz, \vec{n} și versorul \vec{k} al axei Oz formează un unghi ascuțit) și notată Σ_+ , iar semnul "-" în fața radicalilor caracterizează cealaltă față a suprafeței Σ , numită față inferioară în raport cu Oz (în acest caz, \vec{n} și versorul \vec{k} al axei Oz formează un unghi obtuz) și notată Σ_- .

Distanța de la punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul de ecuație

$$ax + by + cz + d = 0$$

este dată de formula

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Această formulă se poate stabili astfel: se caută extremele (mai exact minimumul) funcției $f(x, y, z) = d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$, condiționate de ecuația $ax + by + cz + d = 0$. (vezi cele spuse în §5.9/5.9.2).

Problema 35

Să se calculeze ariile următoarelor suprafețe:

- $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 \leq Rx, z \geq 0;$
- $S : z = x^2 + y^2, z \in [0, R^2];$
- $S : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0, 0 \leq z \leq 1;$

Rezolvare. a). Suprafața S este dată printr-o ecuație carteziană (vezi §5.9/5.9.2 – Pânze și suprafețe). Suprafața S este porțiunea din emisfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$ situată în interiorul cilindriului $x^2 + y^2 = Rx$ (care are cercul director cercul $x^2 + y^2 = Rx$ din planul xOy și generatoarele paralele cu axa Oz). Pentru calculul ariei suprafeței S, determinăm mai întâi o reprezentare parametrică a sa. Pentru

aceasta, trecem la coordonate sferice (Exemplul 5.6.2), plecând de la reprezentarea parametrică a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \sin \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \varphi \end{cases}, (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

Pentru a determina domeniul de variație Δ pentru θ și φ corespunzător interiorului cilindriului, punem condiția

$$(R \cos \theta \sin \varphi)^2 + (R \sin \theta \sin \varphi)^2 \leq R^2 \cos \theta \sin \varphi,$$

de unde obținem $\sin \varphi \leq \cos \theta$ și ca urmare,

$$\Delta = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - |\theta|\}.$$

Așadar, reprezentarea parametrică a suprafeței S este

$$S : \begin{cases} x = R \cos \theta \sin \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \varphi \end{cases}, (\theta, \varphi) \in \Delta.$$

Cu aceasta, aria suprafeței S este dată de formula (Propoziția 10.1.1)

$$\text{Aria (S)} = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2(\theta, \varphi) + B^2(\theta, \varphi) + C^2(\theta, \varphi)} d\theta d\varphi,$$

Calcul simple ne conduc la

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = -R^2 \cos \theta \sin^2 \varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = -R^2 \sin \theta \sin^2 \varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = -R^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Ca urmare, elementul de arie pentru emisfera considerată, în coordonate sferice, este

$$d\sigma = \sqrt{A^2(\theta, \varphi) + B^2(\theta, \varphi) + C^2(\theta, \varphi)} d\theta d\varphi = R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

$$\text{și atunci, Aria (S)} = \iint_{\Delta} R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2} - |\theta|} \sin \varphi d\varphi \right) d\theta =$$

$$= 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \sin \varphi d\varphi \right) d\theta = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2} - \theta} \right) d\theta =$$

$$= 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2R^2 (\theta + \cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2 (\pi - 2)$$

b). Suprafața S : $z = x^2 + y^2$, pentru care $z \in [0, R^2]$, este dată prin ecuație carteziană. Suprafața S este porțiunea din paraboloidul

$z = x^2 + y^2$ pentru care $z \in [0, R^2]$, adică pentru care $x^2 + y^2 \leq R^2$; cu alte cuvinte, suprafața S este porțiunea din paraboloid situată în interiorul cilindriului de ecuație $x^2 + y^2 = R^2$ (cilindru care are cercul director cercul $x^2 + y^2 = R^2$ din planul xOy și generatoarele paralele cu axa Oz). Pentru calculul ariei suprafeței S , determinăm mai întâi o reprezentare parametrică a sa. Pentru aceasta, trecem la coordonate cilindrice (vezi Exemplul 5.6.2):

$$S : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \rho^2 \end{cases}, (\rho, \theta) \in \Delta,$$

unde $\Delta \subset [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ se determină din condiția ca S să fie în interiorul cilindriului $x^2 + y^2 = R^2 : (\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 \leq R^2$.

Rezultă $\theta \in [0, 2\pi]$ și $\rho \in [0, R]$. Așadar, $\Delta = [0, R] \times [0, 2\pi]$ și ca urmare, reprezentarea parametrică a suprafeței S este

$$S : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = \rho^2 \end{cases}, (\rho, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi].$$

Calculare simple ne conduc la

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\rho,\theta)} = -2\rho^2 \cos \theta, B = \frac{D(z,x)}{D(\rho,\theta)} = -2\rho^2 \sin \theta, C = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho$$

Ca urmare, elementul de arie pentru paraboloidul de ecuație $z = x^2 + y^2$, în coordonate cilindrice, este

$$d\sigma = \sqrt{A^2(\rho,\theta) + B^2(\rho,\theta) + C^2(\rho,\theta)} d\rho d\theta = \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho d\theta.$$

$$\text{și atunci, Aria}(S) = \iint_{\Delta} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho d\theta = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^R \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = \frac{\pi}{6} \left(\sqrt{1 + 4\rho^2} \right)^3 \Big|_0^R = \frac{\pi}{6} \left[\left(\sqrt{1 + 4R^2} \right)^3 - 1 \right].$$

c). Suprafața S este dată printr-o ecuație carteziană.

Suprafața S este porțiunea din hiperboloidul cu o pânză $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ pentru care $z \in [0, 1]$, adică pentru care $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$; cu alte cuvinte, S este o suprafață proiectabilă pe planul xOy :

$$S : z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, (x, y) \in D,$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Cu aceasta, aria suprafeței S este dată de formula

$$\text{Aria}(S) = \iint_D \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} dx dy,$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ sunt notațiile lui Monge (Propoziția 10.1.2).

Calcul simple ne dau $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$.

Ca urmare, Aria (S) = $\iint_D \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2 - 1}} dx dy$.

Pentru calculul acestei integrale, trecem la coordonate polare prin (vezi Teorema 9.4.5 și Exemplit 5.6.1)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, (\rho, \theta) \in [1, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi],$$

$$\begin{aligned} \text{Ca urmare, } \iint_D \sqrt{\frac{2(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2 - 1}} dx dy &= \int_{[1, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi]} \int \sqrt{\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}} \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}} \rho d\theta = 2\pi \int_{1+0}^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}} \rho d\rho. \end{aligned}$$

Aici, se impune substituția $\sqrt{\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}} = t$, adică schimbarea de variabilă $\rho = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - 2}} : [\sqrt{3}, \infty) \rightarrow (1, \sqrt{2}]$ (vezi Teorema 7.4.8). Ca

$$\begin{aligned} \text{urmare, } \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}} \rho d\rho &= \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2 - 2)^2} dt = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \left(\frac{1}{t^2 - 2} + \frac{2}{(t^2 - 2)^2} \right) dt = \\ &= \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{1}{t - \sqrt{2}} - \frac{1}{t + \sqrt{2}} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(t - \sqrt{2})^2} + \frac{1}{(t + \sqrt{2})^2} \right) \right] dt = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t - \sqrt{2}} + \frac{1}{t + \sqrt{2}} \right) \right] \Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

În concluzie, Aria (S) = $2\pi \left[\frac{\sqrt{2}}{4} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$. ■

Observație. La a) și b), se poate vedea S ca fiind proiectabilă pe planul xOy; ca urmare, aria lui S se poate determina ca la pct. c). Similar, la pct. c), se poate da o reprezentare parametrică a hiperboloidului, de exemplu, folosind coordonatele polare; aria lui S se poate determina ca la pct. b).

Se obțin aceleași rezultate, conform cu Teorema 10.1.2.

Observație. La pct. c), integrala dublă ce dă aria lui S este o integrală dublă improprie. Se poate arăta, ca în problemele ante-

rioare, că ea este convergentă. De altfel, calculele de mai sus transferă convergența acestei integrale la convergența integralei $\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2-2)^2} dt$.

Teorema 7.4.6 a lui Leibniz–Newton arată că această integrală este convergentă, după cum rezultă din cele spuse mai sus.

Observație. Alte amănunte în legătură cu calculul ariei unei suprafețe se găsesc în §10.1

Problema 36

Să se calculeze următoarele integrale de suprafață:

a). $\iint_S (x^4 + y^4 + z^4) d\sigma$, S este sfera de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

b). $\iint_S \frac{1}{1+z} d\sigma$, unde S este porțiunea din suprafața paraboloidului $2z = x^2 + y^2$ cuprinsă în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$;

c). $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$, unde $S : (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2xy$.

Rezolvare. Integralele sunt integrale de suprafață de speța I-a

a). Suprafața S este dată prin ecuație carteziană și este sfera cu centrul în origine și de rază 1. Având în vedere continuitatea funcției polinomiale $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$ și reprezentarea parametrică în coordonate sferice a lui S,

$$\begin{cases} x = \cos \theta \sin \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \varphi \end{cases}, (\theta, \varphi) \in \Delta = [0, 2\pi] \times [0, \pi],$$

integrala de suprafață o vom calcula cu formula din Teorema 10.2.1. Având în vedere faptul că elementul de arie pentru sfera considerată, în coordonate sferice, este $d\sigma = \sin \varphi d\theta d\varphi$ (vezi problema anterioară), formula amintită ne dă

$$\begin{aligned} & \iint_S (x^4 + y^4 + z^4) d\sigma = \\ &= \iint_{\Delta} (\cos^4 \theta \sin^4 \varphi + \sin^4 \theta \sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi (\cos^4 \theta \sin^4 \varphi + \sin^4 \theta \sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \sin \varphi d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi [(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta) \sin^5 \varphi + \cos^4 \varphi \sin \varphi] d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} [(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\theta) \frac{16}{15} + \frac{2}{5}] d\theta = \frac{12\pi}{5}, \text{ pentru c\^a } \int_0^\pi \cos^4 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{5} \text{ \u015fi} \\
&\int_0^\pi \sin^5 \varphi d\varphi = \frac{1}{16} \int_0^\pi (10 \sin \varphi - 5 \sin 3\varphi + \sin 5\varphi) d\varphi = \frac{16}{15}.
\end{aligned}$$

b). Suprafa\u021ba S este dat\u0103 prin ecua\u021bie cartezian\u0103 explicit\u0103,

$$S : z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Deoarece func\u021bia ra\u021bional\u0103 $f(x,y,z) = \frac{1}{1+z}$ este continu\u0103 pe domeniul D, vom calcula integrala de suprafa\u021b\u0103 cu formula din Teorema 10.2.3.

Elementul de arie pentru paraboloidul considerat, \u00een coordonate

carteziene, este dat de $d\sigma = \sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)} dx dy$, unde

$p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ sunt nota\u021biile lui Monge (Propozi\u021bia 10.1.2).

Calcul simple ne conduc la $p = \frac{\partial z}{\partial x} = x$ \u015fi $q = \frac{\partial z}{\partial y} = y$. Ca urmare,

elementul de arie este $d\sigma = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$ \u015fi atunci,

$$\iint_S \frac{1}{1+z} d\sigma = \iint_D \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

Pentru calculul acestei integrale, trecem la coordonate polare prin (vezi Teorema 9.4.5 \u015fi Exemplit 5.6.1)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, (\rho, \theta) \in [0,1] \times [0,2\pi].$$

$$\text{Ca urmare, } \iint_D \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}{1 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)} dx dy = 2 \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} \frac{\sqrt{1 + \rho^2}}{2 + \rho^2} \rho d\rho d\theta =$$

$$= 2 \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1 + \rho^2}}{2 + \rho^2} \rho d\theta = 4\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + \rho^2}}{2 + \rho^2} \rho d\rho =$$

$$= 4\pi \int_0^1 \frac{1 + \rho^2}{2 + \rho^2} (\sqrt{1 + \rho^2})' d\rho = 4\pi \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^1}{1 + t^2} dt = 4\pi (t - \arctg t) \Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= 4\pi (\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{2} - 1 + \frac{\pi}{4})$$

Așadar,
$$\iint_S \frac{1}{1+z} d\sigma = 4\pi (\sqrt{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{2} - 1 + \frac{\pi}{4}).$$

c). Suprafața S este dată prin ecuație carteziană. Folosind coordonatele polare, reprezentarea parametrică a suprafeței S este

$$S : \begin{cases} x = r(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \varphi \\ y = r(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi \\ z = r(\theta, \varphi) \cos \varphi \end{cases}, (\theta, \varphi) \in \Delta \subset [0, 2\pi] \times [0, \pi],$$

unde $r(\theta, \varphi)$ se determină din condiția $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2a^2xy$ (vezi Propoziția 5.9.2). Rezultă $r(\theta, \varphi) = a \sin \varphi \sqrt{\sin 2\theta}$.

Având în vedere și simetria suprafeței, rezultă că ecuația polară a suprafeței este

$$S : r = a \sin \varphi \sqrt{\sin 2\theta}, (\theta, \varphi) \in \Delta = ([0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]) \times [0, \pi].$$

Deoarece $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ este continuă, integrala de suprafață se calculează cu formula din Teorema 10.2.1.

Elementul de arie pentru suprafața S dată prin ecuație polară, este

$$(Definiția 10.1.5) \quad d\sigma = r \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \left(r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2\right)} \sin^2 \varphi d\theta d\varphi.$$

Calculare simple ne conduc la $d\sigma = a^2 \sin^2 \varphi d\theta d\varphi$ și ca urmare,

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma &= a^2 \iint_{\Delta} r^2(\theta, \varphi) \sin^2 \varphi d\theta d\varphi = \\ &= a^4 \iint_{\Delta} \sin 2\theta \sin^4 \varphi d\theta d\varphi = a^4 \int_{[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]} d\theta \int_0^{\pi} \sin 2\theta \sin^4 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{3\pi}{8} a^4 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \right] = \frac{3\pi}{4} a^4, \end{aligned}$$

pentru că $\int_0^{\pi} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{8}$. ■

Observație. La pct. a) și c), prezența grupului $x^2 + y^2 + z^2$ în ecuația carteziană a suprafeței sugerează folosirea coordonatelor sferice pentru a determina ecuația polară a suprafeței și cu ajutorul ei, o reprezentare parametrică a suprafeței. Urmează determinarea elementului de arie $d\sigma$, în forma corespunzătoare – și reținerea lui

pentru alte probleme – și aplicarea formulei de calcul pentru integrala de suprafață (formulă care o transformă într-o integrală dublă).

La pct. b), suprafața este dată prin ecuație carteziană explicită (proiectabilă pe unul din planele de coordonate). Se determină elementul de arie $d\sigma$, în forma corespunzătoare – și reținerea lui pentru alte probleme – și aplicarea formulei de calcul pentru integrala de suprafață (formulă care o transformă într-o integrală dublă).

Observație. La fiecare din pct. a) și c), se poate descompune S într-o reuniune de două suprafețe, fiecare proiectabilă pe unul din planele de coordonate. Având în vedere Proprietățile integralei de suprafață, fiecare integrală se poate scrie ca o sumă de două integrale, acestea calculându-se ca la pct. b).

Asemănător, la pct. b), se poate determina o reprezentare parametrică a suprafeței S , folosind coordonatele cilindrice. Apoi, se precedează ca la pct. a).

În aceste considerații, se are în vedere Teorema 10.2.2.

Problema 37

Să se calculeze integralele de suprafață în raport cu coordonatele:

a). $\iint_S xdydz - ydzdx - zdx dy$ unde S este fața superioară în raport cu Oz a suprafeței limitată de triunghiul ABC , unde $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$;

b). $\iint_S x^2 dydz + xydzx + xzdx dy$, unde S este fața interioară a suprafeței $y^2 + z^2 = 4$ cuprinsă între planele $x = -2$ și $x = 3$;

c). $\iint_S x^3 y^2 z dydz + x^2 y^3 z dzdx + x^2 y^2 z^2 dx dy$, unde S este fața exterioară a compactului limitat de suprafețele $z = x^2 + y^2$, $z = 4$.

Rezolvare. a). Ecuația carteziană a suprafeței S se obține scriind ecuația planului determinat de trei puncte, sau, mai simplu, ecuația planului prin tăieturi: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

De aici rezultă ecuația explicită a suprafeței S ,

$$S : z = 3\left(1 - \frac{x}{1} - \frac{y}{2}\right), (x,y) \in D,$$

unde D este proiecția lui S pe planul xOy ,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{1} + \frac{y}{2} \leq 1\}.$$

Având în vedere Remarca 5.9.8, versorul normalei la fața superioară în raport cu axa Oz a suprafeței S este

$$\vec{n} = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\vec{i} + \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\vec{k},$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ sunt notațiile lui Monge.

Concret, $p = -3$, $q = -\frac{3}{2}$ și avem $\vec{n} = \frac{6}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k}$.

Acestea fiind zise, pentru calculul integralei aplicăm Definiția 10.3.1

$$\iint_S xdydz - ydzdx - zdx dy = \iint_S \left(\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z\right)d\sigma,$$

urmată de Teorema 10.2.3,

$$\iint_S \left(\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z\right)d\sigma = \iint_D \left[\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{2}{7} \cdot 3 \left(1 - \frac{x}{1} - \frac{y}{2}\right)\right] \frac{7}{2} dx dy,$$

pentru că elementul de arie pentru S este $d\sigma = \frac{7}{2} dx dy$.

Direct, integrala se poate calcula cu Teorema 10.3.2:

$$\begin{aligned} \iint_S xdydz - ydzdx - zdx dy &= \iint_D \left[3x - \frac{3}{2}y - 3 \left(1 - \frac{x}{1} - \frac{y}{2}\right)\right] dx dy = \\ &= \iint_D 3(2x - 1) dx dy. \end{aligned}$$

Pentru calculul integralei duble, observăm că domeniul D este simplu în raport cu axa Oy $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1], 0 \leq y \leq 2(1-x)\}$ (vezi Propoziția 9.4.1) și aplicăm Teorema 9.4.3:

$$\begin{aligned} \iint_D 3(2x - 1) dx dy &= 3 \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} (2x - 1) dy = \\ &= 6 \int_0^1 (-2x^2 + 3x - 1) dx = (-4x^3 + 9x^2 - 6x) \Big|_0^1 = -1. \end{aligned}$$

Așadar, $\iint_S xdydz - ydzdx - zdx dy = -1$.

b). Deoarece S este o porțiune dintr-o suprafață cilindrică cu cerul director $y^2 + z^2 = 4$ situat în planul yOz și cu generatoarele paralele cu axa Ox, folosim coordonatele cilindrice pentru a obține o reprezentare parametrică a sa:

$$S : x = x, y = \cos \theta, z = \sin \theta, (\theta, x) \in [0, 2\pi] \times [-2, 3] = \Delta.$$

Având în vedere Remarca 5.9.7, versorul normalei la fața interioară a suprafeței S este $\vec{n} = -(\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{k})$.

Acum, pentru calculul integralei date aplicăm Teorema 10.3.1:

$$\begin{aligned} & \iint_S x^2 dydz + xydzdx + xzdx dy = \\ & = - \iint_{\Delta} (x \cos^2 \theta + x \sin^2 \theta) d\theta dx = - \int_{-2}^3 dx \int_0^{2\pi} x d\theta = -2\pi \int_{-2}^3 x dx = -5\pi. \end{aligned}$$

c). Suprafața S este formată din două porțiuni se suprafață:

- o porțiune din suprafața paraboloidului de ecuație $z = x^2 + y^2$, dată prin $S_1 : z = x^2 + y^2$, $(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$, orientată după normala la fața inferioară în raport cu Oz ;
- o porțiune din suprafața planului de ecuație $z = 4$, precizată prin $S_2 : z = 4$, $(x,y) \in D$, orientată după normala la fața superioară în raport cu Oz (vezi Remarca 5.9.8 și după).

Având în vedere proprietățile integralei de suprafață de speța a doua (vezi Remarca 10.3.3), are loc egalitatea

$$\begin{aligned} & \iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy = \\ & = \iint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdx dy + \iint_{S_2} xdydz + ydzdx + zdx dy \end{aligned}$$

și rămâne să calculăm aceste ultime două integrale.

Vom folosi Teorema 10.3.2. Pentru suprafața S_1 avem $p(x,y) = 2x$ și $q(x,y) = 2y$ și ca urmare, prima integrală devine

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdx dy = \\ & = - \iint_D [-2x^2 - 2y^2 + (x^2 + y^2)] dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Trecând la coordonate polare, avem

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_{[0,2] \times [0,2\pi]} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\theta = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^3 d\theta = 8\pi$$

și ca urmare, $\iint_{S_1} xdydz + ydzdx + zdx dy = 8\pi$.

La fel, pentru suprafața S_2 avem $p(x,y) = q(x,y) = 0$ și ca urmare, a doua integrală devine

$$\iint_{S_2} xdydz + ydzdx + zdx dy = \iint_D 4dx dy = 4\text{aria}(D) = 16\pi.$$

Așadar, $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy = 24\pi$. ■

Observație. La pct. a), suprafața S este proiectabilă și pe celelalte plane de coordonate.

La pct. c), rezultatul obținut reprezintă triplul volumului corpului compact limitat de suprafețele $z = x^2 + y^2$, $z = 4$ (vezi §10.3/10.3.3).

Observație. În general, o integrală de suprafață în raport cu coordonatele se calculează fie transformând-o într-o integrală de suprafață în raport cu aria, conform definiției, fie transformând-o direct într-o integrală dublă, prin Teoremele 10.3.1, 10.3.2.

Problema 38

Să se calculeze fluxul câmpului vectorial $F = (y,x,z)$ prin fața exterioară a corpului compact

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Rezolvare. a). Conform cu Definiția (vezi §10.3/10.3.3 sau Definiția 12.5.4), fluxul câmpului vectorial $F = (y,x,z)$ prin fața exterioară S a corpului K este $\Phi_F = \iint_S ydydz + xdzdx + zdx dy$.

Fața exterioară S a corpului compact K este formată din două sfere:

- Sfera S_e , de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, care limitează la exterior corpul K și care trebuie orientată după normala exterioară, care în punctul curent are versorul $\vec{n}_e = \frac{x}{2}\vec{i} + \frac{y}{2}\vec{j} + \frac{z}{2}\vec{k}$,
- Sfera S_i , de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, care limitează la interior corpul K și care trebuie orientată după normala interioară, care în punctul curent are versorul $\vec{n}_e = - (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.

Având în vedere proprietățile integralei de suprafață de speța a doua (vezi Remarca 10.3.3), are loc egalitatea $\iint_S ydydz + xdzdx + zdx dy$

$$= \iint_{S_e} ydydz + xdzdx + zdx dy + \iint_{S_i} ydydz + xdzdx + zdx dy$$

și rămâne să calculăm aceste ultime două integrale.

Având în vedere Definiția 10.3.1 și cele de mai sus,

$$\iint_{S_e} ydydz + xdzdx + zdx dy = \frac{1}{2} \iint_{S_e} (2xy + z^2) d\sigma.$$

Integrala de suprafață în raport cu aria o calculăm cu Teorema 10.2.1, folosind pentru S_e reprezentarea parametrică în coordonate sferice (vezi Exemplul 5.6.2): $S_e : x = 2\cos\theta \sin\varphi, y = 2\sin\theta \sin\varphi, z = 2\cos\varphi, (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] = \Delta$.

Aplicând formula din Teoremă și ținând cont că $d\sigma = 4\sin\varphi d\theta d\varphi$,

$$\iint_{S_e} (2xy + z^2) d\sigma = 16 \iint_{\Delta} (2\sin\theta \cos\theta \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \sin\varphi d\theta d\varphi =$$

$$= 16 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} (2\sin\theta \cos\theta \sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \sin\varphi d\theta =$$

$$= 16 \int_0^\pi (\sin^2\theta \sin^3\varphi + \theta \cos^2\varphi \sin\varphi) \Big|_0^{2\pi} d\varphi = 32\pi \frac{\cos^3\varphi}{3} \Big|_0^\pi = \frac{64\pi}{3},$$

și ca urmare, $\iint_{S_e} ydydz + xdzdx + zdx dy = \frac{32\pi}{3}$.

La fel, $\iint_{S_i} ydydz + xdzdx + zdx dy = - \iint_{S_i} (2xy + z^2) d\sigma = -\frac{4\pi}{3}$.

Așadar, $\iint_S ydydz + xdzdx + zdx dy = \frac{28\pi}{3}$. ■

Problema 39

Folosind formula lui Green – Riemann, să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

a). $\oint_C x^2 y dx - (y + x^4) dy$, unde $C : x^2 + y^2 = R^2$;

- b). $\oint_C ye^{x^2 + 4y^2} dx - xe^{x^2 + 4y^2} dy$, unde $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;
- c). $\oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$, unde C este frontiera domeniului
 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y - x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}, x > 0\}$;
- d). $\oint_C (x^4 - 3xy^2)dx + (3x^2y - y^4)dy$, unde $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$
- e). $\int_C y(x-1)dx + x(y+1)dy$, $C : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, y \leq 0$, fiind parcursă

în sensul acelor de ceasornic.

Rezolvare. a). Curba C este cercul cu centrul în origine și de rază R , orientat pozitiv față de domeniul compact D pe care îl limitează: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Funcțiile $P(x,y) = x^2y$ și $Q(x,y) = -(y + x^4)$ sunt continue împreună cu derivatele lor parțiale $\frac{\partial P}{\partial y} = x^2$ și $\frac{\partial Q}{\partial x} = -4x^3$, fiind funcții polinomiale. Formula lui Green – Riemann (vezi Teorema 11.1.1) ne dă

$$\oint_C x^2y dx - (y + x^4)dy = \iint_D (-4x^3 - x^2) dx dy$$

și trecând la coordonate polare (vezi Teorema 9.4.5 și Exemplul 5.6.1),

$$\iint_D (-4x^3 - x^2) dx dy = \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} (-4\rho^3 \cos^3 \theta - \rho^2 \cos^2 \theta) \rho d\rho d\theta =$$

$$= \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} (-4\rho^4 \cos^3 \theta - \rho^3 \cos^2 \theta) d\theta = -\frac{\pi R^4}{4}, \text{ pentru că}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (\cos 3\theta + 3\cos \theta) d\theta = 0.$$

Așadar, $\oint_C x^2y dx - (y + x^4)dy = -\frac{\pi R^4}{4}$.

b). Curba C este elipsa cu centrul în origine și de semiaxe 2 și 1, orientată pozitiv față de domeniul compact D pe care îl limitează:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}.$$

Funcțiile $P(x,y) = ye^{x^2 + 4y^2}$ și $Q(x,y) = -xe^{x^2 + 4y^2}$ sunt continue împreună cu derivatele lor parțiale

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{x^2 + 4y^2} (8y^2 + 1) \text{ și } \frac{\partial Q}{\partial x} = -e^{x^2 + 4y^2} (2x^2 + 1)$$

ca funcții compuse de funcții polinomiale și exponențiale. Formula lui Green – Riemann (vezi Teorema 11.1.1) ne dă

$$\oint_C ye^{x^2 + 4y^2} dx - xe^{x^2 + 4y^2} dy = - \iint_D e^{x^2 + 4y^2} (2x^2 + 8y^2 + 2) dx dy$$

și trecând la coordonate polare generalizate prin formulele

$$x = 2\rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, (\rho, \theta) \in \Delta = [0,1] \times [0,2\pi], J = 2\rho,$$

(vezi Teorema 9.4.5 și Exemplul 5.6.1), avem în continuare,

$$\begin{aligned} & \iint_D e^{x^2 + 4y^2} (2x^2 + 8y^2 + 2) dx dy = \\ & = 2 \iint_{\Delta} e^{4\rho^2} (8\rho^2 + 2) \rho d\rho d\theta = 4 \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} e^{4\rho^2} (4\rho^2 + 1) \rho d\theta = \\ & = 8\pi \int_0^1 e^{4\rho^2} (4\rho^2 + 1) \rho d\rho = \pi \int_0^1 (e^{4\rho^2})' (4\rho^2 + 1) d\rho = 4\pi e^{4\rho^2} \rho^2 \Big|_0^1 = 4\pi e^4 \end{aligned}$$

$$\text{Așadar, } \oint_C ye^{x^2 + 4y^2} dx - xe^{x^2 + 4y^2} dy = -4\pi e^4.$$

c). Curba C este un patrulater curbiliniu, orientat pozitiv față de domeniul compact D pe care îl limitează:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y - x \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x}, x > 0\}.$$

Funcțiile $P(x,y) = 2(x^2 + y^2)$ și $Q(x,y) = (x + y)^2$ sunt continue împreună cu derivatele lor parțiale $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y$ și $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y)$, fiind funcții polinomiale. Formula lui Green – Riemann (vezi Teorema

$$11.1.1) \text{ ne dă } \oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy = \iint_D 2(x - y) dx dy \text{ și}$$

această integrală dublă o calculăm prin Metoda schimbării de variabilă (vezi Teorema 9.4.5). Pentru aceasta, considerăm transformarea

$$\text{punctuală } T : D \rightarrow \Delta = [0,1] \times [1,2], T(x,y) = (u,v) \iff \begin{cases} u = y - x \\ v = xy \end{cases}$$

Avem că T este bijectivă, de clasă C^1 și transformare regulată pe D deoarece $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = -(x+y) \neq 0$.

Ca urmare, transformarea inversă satisface condițiile din Teorema

$$\text{amintită și } \iint_D 2(x-y) dx dy = \iint_{\Delta} -2u \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du dv =$$

$$= \iint_{\Delta} \frac{-2u}{\sqrt{u^2+2v}} du dv = \int_1^2 dv \int_0^1 \frac{-2u}{\sqrt{u^2+2v}} du = -2 \int_1^2 \left(\sqrt{u^2+2v} \Big|_0^1 \right) dv =$$

$$= -2 \int_1^2 (\sqrt{1+2v} - \sqrt{2v}) dv = -\frac{2}{3} [5\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 8].$$

$$\text{Așadar, } \oint_C 2(x^2+y^2) dx + (x+y)^2 dy = -\frac{2}{3} [5\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 8].$$

d). Curba C este un patrulater curbiliniu (astroida), orientat pozitiv față de domeniul compact D pe care îl limitează:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1\}.$$

Funcțiile $P(x,y) = x^4 - 3xy^2$ și $Q(x,y) = 3x^2y - y^4$ sunt continue împreună cu derivatele lor parțiale $\frac{\partial P}{\partial y} = -6xy$ și $\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy$, fiind funcții polinomiale. Formula lui Green - Riemann (vezi Teorema

$$11.1.1) \text{ ne dă } \oint_C (x^4 - 3xy^2) dx + (3x^2y - y^4) dy = \iint_D 12xy dx dy.$$

Integrala dublă se calculează prin Metoda schimbării de variabilă (vezi Teorema 9.4.5). Pentru aceasta, considerăm transformarea punctuală $T : \Delta = [0,1] \times [0,2\pi] \rightarrow D$ definită prin $T(\rho, \theta) = (x,y) \iff$

$$\begin{cases} x = \rho^3 \cos^3 \theta \\ y = \rho^3 \sin^3 \theta \end{cases}. \text{ Aplicația } T \text{ este surjectivă, de clasă } C^1 \text{ și are ja-}$$

cobianul $J = 9\rho^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$, după cum ușor se poate constata. Se vede ușor că sunt verificate toate condițiile din Teorema amintită,

$$\text{astfel că avem } \iint_D 12xy dx dy = 108 \iint_{\Delta} \rho^{11} \cos^5 \theta \sin^5 \theta d\rho d\theta =$$

$$= 108 \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^{11} \cos^5 \theta \sin^5 \theta d\theta = 0, \text{ după cum ușor se poate constata}$$

făcând schimbarea de variabilă $\theta = u + \pi$, $u \in [-\pi, \pi]$.

Așadar, $\oint_C (x^4 - 3xy^2)dx + (3x^2y - y^4)dy = 0$.

e). Fie punctele A(-2,0), B(2,0). Completăm curba C cu segmentul AB, parcurs de la A la B, obținând astfel curba închisă Γ , orientată negativ față de domeniul compact D pe care îl limitează. Are loc

$$\begin{aligned} \text{egalitatea} \quad & \int_{\Gamma} y(x-1)dx + x(y+1)dy = \\ & = \int_C y(x-1)dx + x(y+1)dy + \int_{AB} y(x-1)dx + x(y+1)dy. \end{aligned}$$

Prima integrală o calculăm cu formula lui Green - Riemann (și apoi prin trecere la coordonate polare generalizate)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y(x-1)dx + x(y+1)dy &= - \iint_D (2-x+y)dx dy = \\ &= -6 \int_{[0,1] \times [\pi, 2\pi]} (2-2\rho \cos \theta + 3\rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \\ &= -6 \int_0^1 d\rho \int_{\pi}^{2\pi} (2\rho - 2\rho^2 \cos \theta + 3\rho^2 \sin \theta) d\theta = -6(\pi - 2). \end{aligned}$$

Ultima integrală o calculăm direct, folosind reprezentarea parametrică a segmentului AB: $x = t, y = 0, t \in [-2, 2]$.

$$\int_{AB} y(x-1)dx + x(y+1)dy = 0.$$

Ca urmare, $\int_C y(x-1)dx + x(y+1)dy = -6(\pi - 2)$. ■

Observație. Formula lui Green - Riemann transformă, în anumite condiții, o integrală curbilinie în raport cu coordonatele pe o curbă închisă într-o integrală dublă pe domeniul compact limitat de curbă. Uneori, formula se poate aplica și dacă curba este deschisă - vezi e).

Problema 40

Folosind formula lui Gauss - Ostrogradski, să se calculeze următoarele integrale de suprafață:

a). $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, unde S este fața exterioară a corpului $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$;

b). $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, unde S este fața exterioară a corpului $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$;

c). $\iint_S x^2 dydz - y^2 dzdx - z^2 dxdy$, unde S este fața exterioară a corpului compact limitat de planele de ecuații $6x + 4y + 3z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Rezolvare. a). Sunt verificate condițiile din Teorema 11.2.1 a lui Gauss – Ostrogradski și ca urmare,

$$\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz.$$

Pentru calculul integralei triple, se trece la coordonate cilindrice, prin

formulele (vezi Exemplul 5.6.2) $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$, unde $(\rho, \theta, z) \in \Delta =$

$[0,2] \times [0,2\pi] \times [0,1]$, iar $\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho$.

$$\begin{aligned} \text{Ca urmare, } \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz &= \iiint_{\Delta} (\rho^2 + z^2) \rho d\rho d\theta dz = \\ &= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2 + z^2) \rho dz = 2\pi \int_0^2 d\rho \int_0^1 (\rho^3 + \rho z^2) dz = \frac{28\pi}{3}. \end{aligned}$$

În concluzie, $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy = 28\pi$.

b). Condițiile din Teorema 11.2.1 a lui Gauss-Ostrogradski se verifică

și ca urmare, $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = 2 \iiint_{\Omega} (x+y+z) dxdydz$.

Pentru calculul integralei triple, se trece la coordonate sferice, prin

formulele (vezi Exemplul 5.6.2) $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$, unde

$$(\rho, \theta, \varphi) \in \Delta = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}], \text{ iar } \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2 \sin \varphi.$$

Ca urmare,

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{\Delta} (\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \sin \varphi + \cos \varphi) \rho^3 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi = \\ &= \int_0^R d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} (\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \sin \varphi + \cos \varphi) \rho^3 \sin \varphi d\theta = \\ &= \pi \int_0^R d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

În concluzie, $\iiint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \frac{\pi R^4}{2}.$

c). Planul de ecuație $6x + 4y + 3z = 12$ intersectează axele de coordonate în punctele $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(0,0,4)$. Corpul Ω limitat de cele patru plane este tetraedrul $OABC$. Condițiile din Teorema 11.2.1 a lui Gauss - Ostrogradski se verifică și ca urmare,

$$\iiint_S x^2 dy dz - y^2 dz dx - z^2 dx dy = 2 \iiint_{\Omega} (x - y - z) dx dy dz.$$

Pentru calculul integralei triple, se observă că Ω este simplu în raport cu axa Oz (în fapt, și cu celelalte axe - vezi Propoziția 9.4.1):

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, 0 \leq z \leq 4 - 2x - \frac{4}{3}y\},$$

unde D este proiecția lui Ω pe planul xOy :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2], 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x\}.$$

Conform cu Teorema 9.4.3, avem

$$\iiint_{\Omega} (x - y - z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_0^{4 - 2x - \frac{4}{3}y} (x - y - z) dz.$$

Calculăm integrala interioară:

$$\int_0^{4 - 2x - \frac{4}{3}y} (x - y - z) dz = 12x - 4x^2 - 2xy - 8 + \frac{4}{9}y^2 + \frac{4}{3}y$$

și avem în continuare

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} (x - y - z) dx dy dz = \\ &= \iint_D (12x - 4x^2 - 2xy - 8 + \frac{4}{9}y^2 + \frac{4}{3}y) dx dy = \\ &= \int_0^2 dx \int_0^{3 - \frac{3}{2}x} (12x - 4x^2 - 2xy - 8 + \frac{4}{9}y^2 + \frac{4}{3}y) dy, \end{aligned}$$

pentru că domeniul D este simplu în raport cu Oy.

Calculăm integrala interioară:

$$\int_0^{3 - \frac{3}{2}x} (12x - 4x^2 - 2xy - 8 + \frac{4}{9}y^2 + \frac{4}{3}y) dy = 27x - 14 - \frac{33}{2}x^2 + \frac{13}{4}x^3$$

și avem în final

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} (x - y - z) dx dy dz = \\ &= 2 \int_0^2 (27x - 14 - \frac{33}{2}x^2 + \frac{13}{4}x^3) dx = -10. \blacksquare \end{aligned}$$

Observație. Formula lui Gauss – Ostrogradski transformă, în anumite condiții, o integrală de suprafață în raport cu coordonatele pe o suprafață închisă într-o integrală triplă pe domeniul compact limitat de suprafață. Uneori, formula se poate aplica și dacă suprafața este deschisă, asemănător ca în problema anterioară.

Problema 41

Folosind formula lui Stokes, să se calculeze următoarele integrale curbilini:

a). $\int_C x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz$, unde curba C este dată prin

$$C : \begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 5 \sin t \\ z = 2 \cos t + 5 \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi];$$

Să se verifice rezultatul prin calcul direct.

b). $\int_C z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz$, unde curba C : $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ este ori-

entată astfel încât proiecția sa Γ pe planul xOy , cu orientarea indusă, este orientată pozitiv față de domeniul compact pe care îl limitează.

$$c). \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz, \text{ unde curba } C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = Rx \end{cases}$$

este orientată astfel încât proiecția sa pe planul xOy , cu orientarea indusă, este orientată pozitiv față de domeniul compact pe care îl limitează.

Rezolvare. a). Deoarece ecuațiile carteziene ale curbei C sunt $C : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{25} = 1 \\ z = x + y \end{cases}$, C este intersecția cilindrului eliptic de ecuație $\frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{25} = 1$ cu planul de ecuație $z = x + y$.

În aplicarea Formulei lui Stokes (vezi Teorema 11.3.1), luăm drept suprafață S ce are pe C ca bordură orientată porțiunea din planul de ecuație $z = x + y$ situată în interiorul cilindrului $\frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{25} = 1$, orientată după normala la fața superioară în raport cu Oz .

Conform formulei, avem

$$\int_C x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz = \iint_S dy dz - dz dx + dx dy.$$

Pentru calculul integralei de suprafață, apelăm la formula din Teorema 10.3.2, pentru că S este proiectabilă pe planul xOy :

$$S : z = x + y, (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^4}{25} \leq 1\}.$$

Avem $p(x, y) = -1$, $q(x, y) = -1$ și atunci,

$$\iint_S dy dz - dz dx + dx dy = \iint_D dx dy = \text{aria}(D) = 10\pi.$$

$$\text{Așadar, } \int_C x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz = 10\pi.$$

Calculul direct se face cu formula din Teorema 8.2.1 (și cu precizările din Remarca 8.2.4):

$$\begin{aligned} \int_C x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz &= \\ &= \int_0^{2\pi} [63 \sin t \cos t + 30 \cos^2 t - 20 \sin^2 t] dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{63}{2} \sin 2t + 25 \cos 2t + 5 \right] dt = 10\pi.$$

b). Curba C este intersecția paraboloidului de ecuație $z = x^2 + y^2$ cu planul de ecuație $x + y + z = 1$ sau, echivalent, este intersecția cilindrului de ecuație $x^2 + y^2 + x + y = 1$ cu planul de ecuație $x + y + z = 1$. Proiecția curbei C pe planul xOy este curba de ecuație $\Gamma : x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$, orientată pozitiv față de domeniul compact D pe care îl limitează.

În aplicarea Formulei lui Stokes (vezi Teorema 11.3.1), luăm drept suprafață S ce are pe C ca bordură orientată porțiunea din planul de ecuație $x + y + z = 1$ situată în interiorul cilindrului de ecuație $x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$, orientată după normala la fața superioară în raport cu Oz.

Conform formulei, avem

$$\int_C z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz = 2 \iint_S y dy dz + z dz dx + x dx dy.$$

Pentru calculul integralei de suprafață, apelăm la formula din Teorema 10.3.2, pentru că S este proiectabilă pe planul xOy:

$$S : z = 1 - x - y, (x, y) \in D$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{3}{2}\}$.

Avem $p(x, y) = -1$, $q(x, y) = -1$ și atunci,

$$2 \iint_S y dy dz + z dz dx + x dx dy = 2 \iint_D (2x - 1) dx dy.$$

Pentru calculul acestei integrale duble, se trece la coordonate polare generalizate

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \rho \cos \theta \\ y = \frac{1}{2} + \rho \sin \theta \end{cases}, \text{ unde } (\rho, \theta) \in \Delta = [0, \sqrt{\frac{3}{2}}] \times [0, 2\pi],$$

iar $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho$. Așadar,

$$2 \iint_D (2x - 1) dx dy = 4 \iint_{\Delta} \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta = 4 \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos \theta d\theta = 0.$$

c). Curba C este intersecția emisferei de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ cu cilindrul de ecuație $x^2 + y^2 = Rx$ (curba lui Viviani).

În aplicarea Formulei lui Stokes (vezi Teorema 11.3.1), luăm drept suprafață S ce are pe C ca bordură orientată porțiunea din emisfera

$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, cuprinsă în interiorul cilindriului $x^2 + y^2 = Rx$ (numită fereastra lui Viviani). Așadar, S se poate preciza prin

$$S : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, (x,y) \in D$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq Rx\}$.

Sensul pe C induce o anumită orientare pe S , și anume orientarea după normala la fața superioară în raport cu Oz . Conform formulei, avem

$$\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = -2 \iint_S z dy dz + x dz dx + y dx dy.$$

Pentru calculul integralei de suprafață, apelăm la formula din Teorema 10.3.2, pentru că S este proiectabilă pe planul xOy . Avem $p(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $q(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$ și atunci,

$$\iint_S z dy dz + x dz dx + y dx dy = \iint_D \left(x + \frac{xy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + y \right) dx dy.$$

Pentru calculul acestei integrale duble, se trece la coordonate polare prin formulele $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Deoarece discul D este tangent în origine la axa Oy , avem, evident, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ și atunci, inegalitatea $x^2 + y^2 \leq Rx$ ne conduce la $0 \leq \rho \leq R \cos \theta$. Ca urmare,

$$\Delta = \{(\rho, \theta) \mid \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], 0 \leq \rho \leq R \cos \theta\}$$

și atunci, integrala dublă devine $\iint_D \left(x + y + \frac{xy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right) dx dy =$

$$\begin{aligned} &= \iint_D \left(\rho(\cos \theta + \sin \theta) + \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \left(\rho^2(\cos \theta + \sin \theta) + \frac{\rho^3 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) d\rho = \\ &= \frac{R^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 \theta (\cos \theta + \sin \theta)) d\theta - \\ &\quad - \frac{R^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta ((2 + \cos^2 \theta) |\sin \theta| - 2) d\theta = \end{aligned}$$

$$= \frac{2R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \frac{R^3}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}) d\theta = \frac{\pi R^3}{8}.$$

În concluzie, $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = -\frac{\pi R^3}{4}$. ■

Observație. Formula lui Stokes transformă, în anumite condiții, o integrală curbilinie în raport cu coordonatele pe o curbă din spațiu într-o integrală de suprafață în raport cu coordonatele pe o suprafață ce se sprijină pe curba respectivă. Deoarece fiecare din cele două integrale depinde de orientarea pe curbă respectiv pe suprafață, este necesară o compatibilitate între cele două orientări (vezi Teorema 11.3.1 și Definiția 5.9.16).

Observație. Formula lui Stokes generalizează (de la plan la spațiu) formula lui Green-Riemann.

Observație. Orientarea unei curbe în spațiu dată ca intersecție a două suprafețe (adică precizarea sensului de parcurs pe curbă) se face prin context. Uneori formulările sunt greoaie. Nu același lucru se întâmplă când curba este dată parametric (vezi §5.9/5.9.2).

Problema 42

Se dau câmpurile

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\vec{v}(x,y,z) = (xyz + x^3)\vec{i} + (y^2 + y^3)\vec{j} + (xz^2 + z^3)\vec{k},$$

$$\vec{w}(x,y,z) = (yz + xy^2)\vec{i} + (xyz + yz^2)\vec{j} + (3xy + x^2z)\vec{k}.$$

- Să se calculeze grad φ și $\Delta\varphi$;
- Să se calculeze derivata câmpului scalar φ după direcția vectorului $\vec{s} = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}$ în punctul $(1,2,3)$;
- Să se calculeze grad div \vec{v} și rot rot \vec{w} .

Rezolvare. Avem în vedere definițiile derivatei după o direcție, gradientului, divergenței și rotorului date în §12.3.

- Conform cu Definiția 12.3.2,

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}.$$

Conform cu Definiția 12.3.6, $\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 6$.

- Conform cu Definiția 12.3.1 și Propoziția 12.3.1,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}}(1,2,3) = \vec{s} \cdot \text{grad}_{(1,2,3)} \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot (2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}) = 4\sqrt{3}.$$

- Conform cu Definiția 12.3.3,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(xyz + x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(xz^2 + z^3) = \\ &= yz + 3x^2 + 2y + 3y^2 + 2xz + 3z^2 = \\ &= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + yz + 2xz + 2y \end{aligned}$$

și ca urmare,

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + yz + 2xz + 2y)\vec{i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + yz + 2xz + 2y)\vec{j} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + yz + 2xz + 2y)\vec{k} = \\ &= (6x + 2z)\vec{i} + (6y + z + 2)\vec{j} + (6z + y + 2x)\vec{k}. \end{aligned}$$

Apoi, cu Definiția 12.3.4, avem

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz + xy^2 & xyz + yz^2 & 3xy + x^2z \end{vmatrix} = \\ &= (3x - xy - 2yz)\vec{i} + (-2y - 2xz)\vec{j} + (yz - z - 2xy)\vec{k} \end{aligned}$$

și ca urmare,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x - xy - 2yz & -2y - 2xz & yz - z - 2xy \end{vmatrix} = z\vec{i} + x\vec{k}.$$

Problema 43

Se dau câmpurile vectoriale

$$\vec{u}(x,y) = -y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$$

$$\vec{v}(x,y,z) = (2x - x^2y + 5y)\vec{i} + (5x - y)\vec{j} - \vec{k}.$$

a). Să se calculeze circulația câmpului vectorial $\vec{u}(x,y)$ pe frontiera domeniului $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4, y \geq 0\}$, parcursă în sens trigonometric și apoi să se verifice rezultatul folosind formula lui Green - Riemann.

b). Să se verifice formula integrală a rotorului pentru câmpul vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ și corpul compact $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 \leq z \leq 4\}$.

Rezolvare. a). Fie C frontiera domeniului D , parcursă în sens trigonometric. Circulația câmpului vectorial $\vec{u}(x,y)$ pe curba C este

(vezi Definiția 12.5.2) integrala curbilinie $\int_C -y^2 dx + x^2 dy$.

Curba C este jumătatea superioară E a elipsei de ecuație $x^2 + 4y^2 = 4$, completată cu diametrul mare al său $[AB]$ pe care ea se sprijină (evident, $A(-2,0)$, $B(2,0)$) și este parcursă în sens trigonometric. Definiția 8.2.5 ne permite să scriem

$$\int_C -y^2 dx + x^2 dy = \int_{[AB]} -y^2 dx + x^2 dy + \int_E -y^2 dx + x^2 dy$$

Cu Teorema 8.2.1 și cu reprezentările parametrice ale celor două curbe, $[AB] : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, t \in [-2, 2], E : \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, \pi],$

avem $\int_{[AB]} -y^2 dx + x^2 dy = 0$ respectiv

$$\begin{aligned} \int_E -y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^\pi (2 \sin^3 \theta + 4 \cos^3 \theta) d\theta = \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \sin 3\theta + \cos 3\theta + 3 \cos \theta \right) d\theta = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Ca urmare, $\int_C -y^2 dx + x^2 dy = \frac{8}{3}$.

Calculăm acum integrala curbilinie cu formula lui Green – Riemann

(vezi Teorema 11.1.1): $\int_C -y^2 dx + x^2 dy = \iint_D 2(x + y) dx dy$.

Integrala dublă se calculează folosind Metoda schimbării de variabilă

(vezi Teorema 9.4.5), trecând la coordonate polare generalizate (vezi

Exemplul 5.6.1):

$$\begin{cases} x = 2\rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, (\rho, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi].$$

Ca urmare,

$$\begin{aligned} \iint_D 2(x + y) dx dy &= \int_{[0, 1] \times [0, \pi]} 4(2\rho \cos \theta + \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_0^1 d\rho \int_0^\pi 4(2\rho \cos \theta + \rho \sin \theta) \rho d\theta = 8 \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{8}{3}, \end{aligned}$$

ceea ce confirmă rezultatul obținut mai sus.

b). Formula integrală a rotorului pentru câmpul vectorial $\vec{v}(x, y, z)$ și corpul compact Ω este (vezi Teorema 12.5.2)

$$\iint_S \vec{n} \times \vec{v}(x, y, z) d\sigma = \iiint_\Omega \text{rot } \vec{v} dx dy dz,$$

unde S este suprafața închisă care limitează corpul Ω , orientată după normala exterioară \vec{n} (vezi Teorema 11.2.1).

Suprafața S (frontiera lui Ω) este formată din două porțiuni de suprafață elementară:

$$S_1 : z = x^2 + 4y^2, (x,y) \in D \text{ și } S_2 : z = 4, (x,y) \in D,$$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$, care au în comun doar bordura lor, o elipsă.

Deoarece S este orientată după normala exterioară, S_1 trebuie orientată după normala la fața inferioară în raport cu Oz iar S_2 după normala la fața superioară în raport cu Oz . Ca urmare, pe S_1 avem $\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + 8y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 64y^2}}$, iar pe S_2 , $\vec{n} = \vec{k}$ (vezi Remarca 5.9.8).

Având în vedere proprietățile integralei de suprafață în raport cu coordonatele (vezi Remarca 10.3.3) precum și formula de calcul a unei astfel de integrale (vezi Teorema 10.3.2), membrul stâng din formula integrală a rotorului de mai sus devine succesiv

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{n} \times \vec{v}(x, y, z)) d\sigma &= \iint_{S_1} (\vec{n} \times \vec{v}(x, y, z)) d\sigma + \\ &+ \iint_{S_2} (\vec{n} \times \vec{v}(x, y, z)) d\sigma = \left(\iint_D (8y - 10x) dx dy \right) \vec{i} + \\ &+ \left(\iint_D 2x dx dy \right) \vec{j} + \left(\iint_D (10x^2 - 18xy + 8x^2y^2 - 40y^2) dx dy \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Integralele duble se calculează folosind Metoda schimbării de variabilă (vezi Teorema 9.4.5), trecând la coordonate polare generalizate (vezi

Exemplul 5.6.1): $\begin{cases} x = 2\rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}, (\rho, \theta) \in \Delta = [0,1] \times [0,2\pi]$.

Așadar,

$$\iint_D (8y - 10x) dx dy = 8 \iint_{\Delta} \rho^2 (2\sin \theta - 5\cos \theta) d\rho d\theta = 0,$$

$$\iint_D 2x dx dy = 8 \iint_{\Delta} \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta = 0,$$

$$\iint_D (10x^2 - 18xy + 8x^2y^2 - 40y^2) dx dy =$$

$$= \iint_{\Delta} 2\rho^3 (40 \cos 2\theta - 18 \sin 2\theta + 32\rho^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\rho d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

și ca urmare, $\iint_S (\vec{n} \times \vec{v}(x, y, z)) d\sigma = \frac{8\pi}{3} \vec{k}$.

Deoarece $\text{rot } \vec{v} = x^2 \vec{k}$, membrul drept din formula integrală a rotorului de mai sus devine succesiv

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\nabla \times \vec{v}(x, y, z)) dx dy dz &= \iiint_{\Omega} (x^2 \vec{k}) dx dy dz = \\ &= \vec{k} \iint_D dx dy \int_{x^2 + 4y^2}^4 x^2 dz = \vec{k} \iint_D x^2 (4 - x^2 - 4y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Integrala dublă se calculează ca mai sus:

$$\iint_D x^2 (4 - x^2 - 4y^2) dx dy = 32 \iint_{\Delta} (1 - \rho^2) \rho^3 \cos^2 \theta d\rho d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

și ca urmare, $\iiint_{\Omega} (\nabla \times \vec{v}(x, y, z)) dx dy dz = \frac{8\pi}{3} \vec{k}$.

Formula integrală a rotorului pentru câmpul vectorial $\vec{v}(x, y, z)$ și corpul compact Ω date se verifică. ■

Observație. Verificarea uneia sau alteia dintre formulele integrale cunoscute presupune calculul integralelor din cei doi membri din formulă și constatarea faptului că ele sunt egale.

Problema 44

a). În expresia câmpului scalar $\varphi = \frac{2xyz + x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, să se treacă la coordonate cilindrice și apoi să se calculeze $\text{grad } \varphi$ și $\Delta\varphi$.

b). În expresia câmpului vectorial $\vec{v} = \frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ să se treacă la coordonate sferice și apoi să se calculeze $\text{rot } \vec{v}$ și $\text{div } \vec{v}$ și un potențial vector pentru \vec{v} .

Rezolvare. a). Formulele de trecere la coordonatele cilindrice sunt
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

Ca urmare,

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi(x,y,z) = \frac{2xyz + x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= \frac{2z\rho^2 \cos\theta \sin\theta + \rho^2 \cos^2\theta - \rho^2 \sin^2\theta}{\sqrt{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta}} = \rho(z \sin 2\theta + \cos 2\theta),\end{aligned}$$

care reprezintă expresia câmpului scalar φ în coordonate cilindrice. Având în vedere expresia gradientului unui câmp scalar în coordonate cilindrice dată în Exemplul 12.4.4, avem

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z =$$

$$= (z \sin 2\theta + \cos 2\theta) \vec{e}_\rho + (2z \cos 2\theta - 2 \sin 2\theta) \vec{e}_\theta + \rho \sin 2\theta \vec{e}_z.$$

Având în vedere expresia laplaceianului unui câmp scalar în coordonate cilindrice dată în Exemplul 12.4.10, avem

$$\begin{aligned}\Delta \varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho(z \sin 2\theta + \cos 2\theta)) + \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho(2z \cos 2\theta - 2 \sin 2\theta)) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \sin 2\theta) = \\ &= \frac{1}{\rho} (z \sin 2\theta + \cos 2\theta) - \frac{4}{\rho} (z \sin 2\theta + \cos 2\theta) = \\ &= -\frac{3}{\rho} (z \sin 2\theta + \cos 2\theta) = -\frac{3\varphi}{\rho^2}\end{aligned}$$

b). Formulele de trecere la coordonatele sferice sunt

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}, \quad \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in (0, \pi).$$

Ca urmare, (vezi Propoziția 12.4.1)

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\rho \sin \theta \sin \varphi \vec{i} - \rho \cos \theta \sin \varphi \vec{j}}{\rho} = \\ &= \sin \theta \sin \varphi \vec{i} - \cos \theta \sin \varphi \vec{j} = -\sin \varphi \vec{e}_\theta,\end{aligned}$$

reprezintă expresia câmpului vectorial \vec{v} în coordonate sferice.

Având în vedere expresiile rotorului și divergenței unui câmp vectorial în coordonate sferice date în Exemplele 12.4.5, 12.4.7, avem

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{v} &= \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \rho \sin \varphi \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & 0 & -\rho \sin^2 \varphi \end{vmatrix} = \\ &= \frac{-\rho \sin 2\varphi \vec{e}_\rho + \rho \sin^2 \varphi \vec{e}_\varphi}{\rho^2 \sin \varphi} = \frac{-2 \cos \varphi}{\rho} \vec{e}_\rho + \frac{\sin \varphi}{\rho} \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

și apoi, $\text{div } \vec{v} = \frac{1}{\rho \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin \varphi) = 0$.

Deci, conform cu Definiția 12.6.3, câmpul vectorial \vec{v} este solenoidal.

Ca urmare, el admite un potențial vector, adică există un câmp vectorial \vec{w} astfel încât $\text{rot } \vec{w} = \vec{v}$. Urmând ideile din demonstrația

Teoremei 12.6.2, căutăm pe \vec{w} sub forma $\vec{w} = w_1\vec{e}_\rho + w_2\vec{e}_\varphi$; se subînțelege că $w_1 = w_1(\rho, \varphi, \theta)$ și la fel w_2 . Condiția $\text{rot } \vec{w} = \vec{v}$ se scrie acum

$$\frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\varphi & \rho \sin \varphi \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ w_1 & w_2 & 0 \end{vmatrix} = -\sin \varphi \vec{e}_\theta.$$

Calculând determinantul după regulile cunoscute, egalitatea devine

$$\begin{cases} \frac{\partial w_2}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial \rho} - \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \end{cases}$$

Rezolvăm acest sistem de ecuații diferențiale cu derivate parțiale; mai exact, căutăm o soluție a acestui sistem. Primele două ecuații ne dau $w_1 = w_1(\rho, \varphi)$ și $w_2 = w_2(\rho, \varphi)$. A treia ecuație se verifică, de exemplu, de $w_1 = \rho \cos \varphi$ și $w_2 = 0$.

În concluzie, un potențial vector pentru câmpul vectorial \vec{v} este

$$\vec{w} = \rho \cos \varphi \vec{e}_\rho. \blacksquare$$

Observație. Pentru a fi absolut corecți, ar fi trebuit să scriem astfel:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(x, y, z) = \varphi(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) = \dots = \\ &= \rho(z \sin 2\theta + \cos 2\theta) = \Phi(\rho, \theta, z) \end{aligned}$$

și $\Phi = \Phi(\rho, \theta, z)$ este expresia câmpului scalar φ în coordonate cilindrice.

Apoi, expresia gradientului lui φ în coordonate cilindrice este

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z = \\ &= (z \sin 2\theta + \cos 2\theta) \vec{e}_\rho + (2z \cos 2\theta - 2 \sin 2\theta) \vec{e}_\theta + \rho \sin 2\theta \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Dacă în această expresie se înlocuiesc versorii \vec{e}_ρ , \vec{e}_θ și \vec{e}_z cu expresiile lor (din Propoziția 12.4.2)

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}, \\ \vec{e}_z = \vec{k}. \end{cases}$$

și se reordonează termenii, obținem

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi &= (z \sin 2\theta + \cos 2\theta) (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) + \\ &+ (2z \cos 2\theta - 2 \sin 2\theta) (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) + \rho \sin 2\theta \vec{k} = \\ &= (2z \sin^3 \theta + \cos \theta + 2 \cos \theta \sin^2 \theta) \vec{i} + \\ &+ (2z \cos^3 \theta - \sin \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta) \vec{j} + (2\rho \sin \theta \cos \theta) \vec{k}. \end{aligned}$$

Înlocuind aici coordonatele cilindrice în funcție de cele carteziane (în fond, înlocuind pe $\rho, \cos \theta$ și $\sin \theta$ în funcție de x, y, z), avem în

continuare, după cum ușor se constată, calculând și derivatele parțiale ale lui φ

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi &= \frac{x^3 + 3xy^2 + 2y^3z}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \vec{i} + \frac{2x^3z - 3x^2y - y^3}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \vec{j} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{k} = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } \varphi \end{aligned}$$

egalitate ce trebuie înțeleasă ca

$$\begin{aligned} \text{grad}_{(\rho, \theta, z)} \Phi &= \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \vec{j} + \\ &+ \frac{\partial \varphi}{\partial z} (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \vec{k} = \\ &= \text{grad}_{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)} \varphi. \end{aligned}$$

Tocmai această egalitate a fost folosită în rezolvarea de mai sus. Ea ilustrează un fapt general valabil, și anume acela că gradientul unui câmp scalar este invariant față de sistemul de coordonate considerat. Rezultate similare sunt pentru divergență și rotor.

Egalitatea anterioară poate fi stabilită și folosind formulele de derivare ale funcțiilor compuse (vezi §5.3, Teoremele 5.3.1 și 5.3.2).

Este clar că și pentru laplaceianului unui câmp scalar avem un rezultat similar

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}.$$

(vezi o Problemă anterioară).

Problema 45

a). Să se arate că fiecare din câmpurile vectoriale de mai jos este armonic pe un domeniu ce se cere a fi precizat și apoi să se determine câte un potențial scalar și un potențial vector al lor:

i). $\vec{v} = (4y + 7z)\vec{j} + (7y - 4z)\vec{k}$,

ii). $\vec{v} = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho$,

b). Să se arate că $\vec{v} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \frac{x^2 + y^2}{z} \vec{k}$ este un câmp vectorial biscalar pe un domeniu ce se cere a fi precizat și apoi să se scrie sub forma $\vec{v} = \varphi \text{ grad } \psi$.

Rezolvare. a). Conform cu Definiția 12.6.5, câmpul vectorial \vec{v} este armonic pe o mulțime deschisă $G \subset \mathbb{R}^3$ (sau \mathbb{R}^2) dacă el este:
– irotațional pe G (adică $\text{rot } \vec{v} = 0$ pe G – vezi Definiția 12.6.1)
– solenoidal pe G (adică $\text{div } \vec{v} = 0$ pe G – vezi Definiția 12.6.3).

i). Având în vedere Definițiile 12.3.4 și 12.3.3 ale rotorului respectiv divergenței în coordonate carteziene, se constată cu ușurință că au loc relațiile $\text{rot } \vec{v} = 0$ și $\text{div } \vec{v} = 0$ pe \mathbb{R}^3 .

Conform cu Definiția 12.6.2, Teorema 12.6.1 și Remarca 12.6.1, câmpul vectorial irotațional \vec{v} are potențialul scalar

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r} + c = \\ &= \int_0^y (4t + 7z)dt + \int_0^z -4tdt + c = 2y^2 + 7yz - 2z^2 + c.\end{aligned}$$

Când c parcurge mulțimea numerelor reale \mathbb{R} , mulțimea de funcții $\varphi(x,y,z) = 2y^2 + 7yz - 2z^2 + c$ este mulțimea tuturor potențialelor scalare pe mulțimea \mathbb{R} pentru câmpul vectorial irotațional \vec{v} .

Conform cu Definiția 12.6.4 și Teorema 12.6.2, câmpul vectorial solenoidal \vec{v} are potențialul vector $\vec{w} = w_1(x,y,z)\vec{i} + w_2(x,y,z)\vec{j}$ cu componentele w_1 și w_2 soluții ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} = 4y + 7z \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = 7y - 4z \end{array} \right. .$$

Din primele două ecuații ale sistemului rezultă $w_2 = w_2(x,y)$ și respectiv $w_1 = 4yz + \frac{7}{2}z^2 + A(x,y)$. Punând condiția ca aceste funcții să verifice și a treia ecuație a sistemului, se obține condiția

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = 7y.$$

Există o infinitate de funcții w_2 și A care verifică această ecuație. Luăm, *de exemplu*, $w_2 = 7xy$, $A = 0$ și atunci,

$$\vec{w} = (4yz + \frac{7}{2}z^2)\vec{i} + 7xy\vec{j}$$

este un potențialul vector pe mulțimea \mathbb{R} pentru câmpul vectorial solenoidal \vec{v} .

Conform cu Remarca 12.6.3, mulțimea potențialelor vectoriale ale lui \vec{v} pe mulțimea \mathbb{R} este

$$\vec{w} = (4yz + \frac{7}{2}z^2)\vec{i} + 7xy\vec{j} + \text{grad } \varphi,$$

unde φ este un câmp scalar de clasă C^2 pe \mathbb{R} , arbitrar.

ii). Considerăm că \vec{v} este dat în coordonate cilindrice, pe domeniul

$$\Delta : \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

Având în vedere expresiile rotorului și divergenței în coordonate cilindrice (vezi Exemplele 12.4.6, 12.4.8),

$$\text{rot } \vec{v} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{div } \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho)}{\partial \rho} = 0.$$

Ca urmare, câmpul vectorial \vec{v} este armonic pe domeniul considerat.

Un potențial scalar $\Phi = \Phi(\rho, \theta, z)$ pentru \vec{v} presupune egalitatea $\text{grad } \Phi = \vec{v}$, adică $\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho$, ceea ce conduce la sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

(vezi în Exemplitul 12.4.4 expresia gradientului în coordonate cilindrice).

Ultimele două ecuații arată că Φ nu depinde de θ și z ; rămâne deci $\Phi = \Phi(\rho)$ și atunci, din prima ecuație avem $\Phi = \ln \rho + c$.

Așadar, mulțimea potențialelor scalare pentru \vec{v} pe domeniul Δ este $\Phi = \ln \rho + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Un potențial vector \vec{w} pentru \vec{v} presupune egalitatea $\text{rot } \vec{w} = \vec{v}$; căutând \vec{w} de forma $\vec{w} = w_1(\rho, \theta, z) \vec{e}_\rho + w_2(\rho, \theta, z) \vec{e}_\theta$, această egalitate devine

$$\frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_1 & w_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho$$

și conduce la sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} -\frac{\partial w_2}{\partial z} = 1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial \rho} - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

Din primele două ecuații rezultă $w_1 = w_1(\rho, \theta)$, $w_2 = -z + B(\rho, \theta)$; acum, a treia ecuație devine $\frac{\partial B}{\partial \rho} - \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = 0$. Luăm $w_1 = 0$, $B = 0$ și această condiție se verifică.

Am obținut că $\vec{w} = -z \vec{e}_\theta$ este un potențial vector pentru câmpul vectorial \vec{v} pe domeniul Δ .

Ca și mai sus, mulțimea potențialelor vectoriale pentru câmpul vectorial \vec{v} este $\vec{w} = -z \vec{e}_\theta + \text{grad } \Phi$, unde Φ este un câmp scalar arbitrar de clasă C^2 pe domeniul Δ .

Considerăm acum că \vec{v} este dat în coordonate sferice, pe domeniul $\Delta : \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), \varphi \in (0, \pi)$. Având în vedere expresiile rotorului și divergenței în coordonate sferice (vezi Exemplele 12.4.5, 12.4.7),

$$\text{rot } \vec{v} = \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \rho \sin \varphi \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{\rho} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial(\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho^2},$$

ceea ce arată că $\vec{v} = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$ este doar câmp irotațional pe Δ .

Un potențial scalar $\Phi = \Phi(\rho, \varphi, \theta)$ pentru \vec{v} presupune egalitatea $\text{grad } \Phi = \vec{v}$, adică $\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho \sin \varphi}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$, ceea ce conduce la sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

(vezi în Exemplul 12.4.3 expresia gradientului în coordonate sferice). Ultimele două ecuații arată că Φ nu depinde de φ și θ ; rămâne deci $\Phi = \Phi(\rho)$ și atunci, din prima ecuație avem $\Phi = \ln \rho + c$.

Așadar, mulțimea potențialelor scalare pentru câmpul vectorial \vec{v} pe domeniul Δ este $\Phi = \ln \rho + c$, $c \in \mathbb{R}$.

b). Pentru câmpul vectorial $\vec{v} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \frac{x^2 + y^2}{z}\vec{k}$ care este de clasă C^1 pe domeniul $D = (0, \infty)^3$, avem

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x & 2y & -\frac{x^2 + y^2}{z} \end{vmatrix} = -\frac{2y}{z}\vec{i} + \frac{2x}{z}\vec{j}.$$

Se constată cu ușurință că $\vec{v} \cdot \text{rot } \vec{v} = 0$. Conform Teoremei 12.6.4, câmpul vectorial \vec{v} este biscalar. Conform cu Definiția 12.6.6, există două câmpuri scalare φ și ψ astfel încât $\vec{v} = \varphi \text{ grad } \psi$.

Se observă că

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + y^2}\vec{v} &= \frac{2x}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2}\vec{j} - \frac{1}{z}\vec{k} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln(x^2 + y^2) \right) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln(x^2 + y^2) \right) \vec{j} - \frac{\partial}{\partial z} (\ln z) \vec{k} = \\ &= \text{grad} \left(\ln \frac{x^2 + y^2}{z} \right), \end{aligned}$$

de unde rezultă $\vec{v} = (x^2 + y^2)\text{grad} \left(\ln \frac{x^2 + y^2}{z} \right)$. ■

Observație. Amănunte în legătură cu câmpurile vectoriale particulare amintite mai sus dar și despre alte câmpuri, se află în §12.6.

Problema 46

a). Să se determine un câmp scalar Φ cunoscând gradientul său pe un domeniu simplu conex D ce se cere a fi precizat:

i). $\text{grad } \Phi = -2xy\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j} - \vec{k}$,

ii). $\text{grad } \Phi = e^z\vec{e}_z$.

b). Să se determine un câmp vectorial irotațional \vec{v} știind divergența sa pe un domeniu simplu conex ce se cere a fi precizat:

i). $\operatorname{div} \vec{v} = xy + yz + xz,$

ii). $\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{\cos \theta}{\rho^4}.$

c). Să se determine un câmp vectorial solenoidal \vec{v} știind rotorul său pe un domeniu simplu conex ce se cere a fi precizat:

i). $\operatorname{rot} \vec{v} = y(1 - 2x)\vec{i} + (z - x^2 + y^2)\vec{j} + (x - 1)\vec{k},$

ii). $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{e}_\theta.$

d). Să se determine un câmp vectorial \vec{v} cunoscând divergența și rotorul său pe un domeniu simplu conex D ce se cere a fi precizat:

i). $\operatorname{div} \vec{v} = -xy, \operatorname{rot} \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k},$

ii). $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \operatorname{rot} \vec{v} = \rho\vec{e}_\rho - 2z\vec{e}_z,$

Rezolvare. a). Avem în vedere cele spuse în §12.7/12.7.1.

i). Deoarece câmpul vectorial $\vec{v} = -2xy\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j} - \vec{k}$ este irotațional pe \mathbb{R}^3 (adică $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ pe \mathbb{R}^3 - vezi Definiția 12.6.1), Teorema 12.7.1 ne asigură că există un câmp scalar Φ astfel încât

$$\operatorname{grad} \Phi = -2xy\vec{i} + (y^2 - x^2)\vec{j} - \vec{k} \text{ pe } \mathbb{R}^3.$$

Apoi, Remarca 12.6.1 ne dă $\Phi(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \vec{v}(x,y,z) \cdot d\vec{r} + c =$

$$= \int_0^x -2ty dt + \int_0^y t^2 dt + \int_0^z -dt + c = -x^2y + \frac{1}{3}y^3 - z + c.$$

Când c parcurge mulțimea numerelor reale \mathbb{R} , mulțimea de funcții $\Phi(x,y,z) = -x^2y + \frac{1}{3}y^3 - z + c$ este mulțimea câmpurilor scalare cerute.

ii). Acum, câmpul vectorial $\vec{v} = e^z\vec{e}_z$ este dat în coordonate cilindrice. Având în vedere expresia rotorului în astfel de coordonate dată în Exemplul 12.4.6, se constată că $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$. Așadar, există un câmp scalar $\Phi = \Phi(\rho, \theta, z)$ astfel încât $\operatorname{grad} \Phi = e^z\vec{e}_z$. Având în vedere expresia gradientului în coordonate cilindrice dată în Exemplul 12.4.4, această egalitate devine $\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{e}_z = e^z\vec{e}_z$ și conduce la sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = e^z \end{cases} .$$

Din primele două ecuații rezultă că $\Phi = \Phi(z)$, iar din ultima,

$$\Phi = e^z + c, c \in \mathbb{R}.$$

Această mulțime de funcții este mulțimea câmpurilor scalare cerute.
b). Avem în vedere cele spuse în §12.7/12.7.2/1. Ca urmare, soluția sistemului

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{v} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{v} = \Phi \end{cases}$$

este $\vec{v} = \operatorname{grad} \psi$, cu $\Delta \psi = \Phi$.

i). Concret, ecuația lui Poisson $\Delta \psi = \Phi$ devine

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = xy + yz + xz.$$

Căutăm o soluție ψ de forma unei funcții polinomiale de gradul trei în x, y, z . Se constată cu ușurință că $\psi = \frac{1}{6}(x^3y + y^3z + xz^3)$ este o soluție a acestei ecuații.

Ca urmare,

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \psi = \frac{1}{6}(3x^2y + z^3)\vec{i} + \frac{1}{6}(x^3 + 3y^2z)\vec{j} + \frac{1}{6}(y^3 + 3xz^2)\vec{k}$$

este un câmp vectorial irotațional cu $\operatorname{div} \vec{v} = xy + yz + xz$.

ii). Câmpul scalar $\Phi = -\frac{\cos \theta}{\rho^4}$ este dat în coordonate cilindrice. În astfel de coordonate, ecuația lui Poisson $\Delta \psi = \Phi$ devine (vezi expresia laplaceianului în coordonate cilindrice în Exemplul 12.4.10)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{\cos \theta}{\rho^4}.$$

Căutăm o soluție ψ de forma $\psi = \psi(\rho, \theta) = \frac{f(\theta)}{\rho^2}$. Ecuația devine (după eliminarea numitorului ρ^4) $f'' + 4f = -\cos \theta$.

O soluție a acestei ecuații este $f(\theta) = -\frac{1}{3} \cos \theta$ și deci, $\psi = -\frac{1}{3\rho^2} \cos \theta$ este o soluție a ecuației lui Poisson de mai sus.

Acum, $\vec{v} = \operatorname{grad} \psi = \frac{2}{3\rho^3} \cos \theta \vec{e}_\rho + \frac{1}{3\rho^3} \sin \theta \vec{e}_\theta$ este un câmp vectorial irotațional ce are divergența $\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{\cos \theta}{\rho^4}$.

c). Avem în vedere cele spuse în §12.7/12.7.2/2. Ca urmare, soluția sistemului $\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{V} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$ (în care $\operatorname{div} \vec{V} = 0$) este $\vec{v} = \vec{w} + \operatorname{grad} \psi$

cu $\Delta \psi = -\operatorname{div} \vec{w}$, \vec{w} fiind un potențial vector pe \mathbb{R}^3 pentru \vec{V} .

i). Concret, pentru $\vec{V} = y(1 - 2x)\vec{i} + (z - x^2 + y^2)\vec{j} + (x - 1)\vec{k}$, avem $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, după cum ușor se poate constata. Ca urmare (vezi Definiția 12.6.3 și Teorema 12.6.2), există un potențial vector (vezi Definiția 12.6.4) pe \mathbb{R}^3 pentru \vec{V} . Căutăm acest potențial vector sub forma $\vec{w} = w_1(x, y, z)\vec{i} + w_2(x, y, z)\vec{j}$.

Condiția $\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{V}$ se transformă în sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{cases} \frac{\partial w_2}{\partial z} &= -y(1-2x) \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} &= z-x^2+y^2 \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} &= x-1 \end{cases} .$$

Din primele două ecuații ale sistemului rezultă

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}z^2 + (y^2-x^2)z + A(x,y) \\ w_2 = (2x-1)yz + B(x,y) \end{cases} ,$$

care duse în a treia ne dă condiția pentru A și B: $\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} = x-1$.

Luăm $A = -yx$ și $B = -x$ și această condiție se verifică.

În consecință, $\vec{w} = \left(\frac{1}{2}z^2 + (y^2-x^2)z - yx\right)\vec{i} + ((2x-1)yz - x)\vec{j}$ este un potențial vector pe \mathbb{R}^3 pentru \vec{V} .

Deoarece $\text{div } \vec{w} = -y - z$, rezultă că ecuația $\Delta\psi = -\text{div}\vec{w}$ devine (vezi Definiția 12.3.6) $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = y + z$.

O soluție a acestei ecuații este $\psi = \frac{1}{6}(y^3 + z^3)$.

Acum avem $\text{grad } \psi = \frac{1}{2}y^2\vec{j} + \frac{1}{2}z^2\vec{k}$ și atunci, soluția \vec{v} căutată este

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}z^2 + (y^2-x^2)z - yx\right)\vec{i} + ((2x-1)yz - x + \frac{1}{2}y^2)\vec{j} + \frac{1}{2}z^2\vec{k}.$$

ii). Considerăm că cerința $\text{rot } \vec{v} = \vec{e}_\theta$ este dată în coordonate cilindrice. Procedăm ca mai sus, lucrând în astfel de coordonate.

Concret, pentru $\vec{V} = \vec{e}_\theta$, avem (vezi Exemplul 12.4.8) $\text{div } \vec{V} = 0$, după cum ușor se poate constata. Ca urmare (vezi Definiția 12.6.3 și Teorema 12.6.2), există un potențial vector (vezi Definiția 12.6.4) pe \mathbb{R}^3 pentru \vec{V} . Căutăm acest potențial vector sub forma

$$\vec{w} = w_1(\rho, \theta, z)\vec{e}_\rho + w_3(\rho, \theta, z)\vec{e}_z.$$

Condiția $\text{rot } \vec{w} = \vec{V}$ se scrie (vezi expresia rotorului în coordonate cilindrice în Exemplul 12.4.6)

$$\frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_1 & 0 & w_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_\theta$$

și se transformă în sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{cases} \frac{\partial w_3}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial \rho} = 1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = 0 \end{cases} .$$

Se constată că o soluție a acestui sistem este $w_1 = 0$ și $w_3 = -\rho$. Ca urmare, $\vec{w} = -\rho\vec{e}_z$ este un potențial vector pe domeniul $\Delta : \rho > 0$,

$\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$ pentru câmpul solenoidal \vec{V} . Deoarece $\operatorname{div} \vec{w} = 0$, rezultă că ecuația $\Delta\psi = -\operatorname{div} \vec{w}$ devine (vezi Definiția 12.4.10)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0.$$

Putem lua $\psi = 0$. Soluția \vec{v} este $\vec{v} = \vec{w} + \operatorname{grad} \psi = -\rho \vec{e}_z$.

Dacă cerința $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{e}_\theta$ este dată în coordonate sferice, se procedează asemănător.

d). i). Conform cu Teorema 12.7.2, o soluție a sistemului

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k} \\ \operatorname{div} \vec{v} = -xy \end{cases}$$

se poate determina sub forma $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, unde \vec{v}_1 și \vec{v}_2 sunt soluții ale sistemelor

$$(S_1) : \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{v} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{v} = -xy \end{cases}, \quad (S_2) : \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}.$$

Determinarea unei soluții \vec{v}_1 pe \mathbb{R}^3 a sistemului (S_1) se face asemănător ca la pct. b). Se obține, de exemplu, $\vec{v}_1 = -\frac{1}{2}x^2y\vec{i} - \frac{1}{6}x^3\vec{j}$.

Analog, determinarea unei soluții \vec{v}_2 pe \mathbb{R}^3 a sistemului (S_2) se face asemănător ca la pct. c). Se obține, de exemplu, $\vec{v}_2 = yz\vec{i} - xz\vec{j}$.

Ca urmare, o soluție pe \mathbb{R}^3 a sistemului dat este

$$\vec{v} = (yz - \frac{1}{2}x^2y)\vec{i} - (\frac{1}{6}x^3 + xz)\vec{j}.$$

ii). Procedăm ca mai sus, lucrând în coordonate cilindrice. Se obține, de exemplu, $\vec{v}_1 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\vec{e}_\rho + \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\vec{e}_z$, ca soluție a sistemului

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{v} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{v} = \frac{2}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{cases}$$

și $\vec{v}_2 = 2\theta\rho z\vec{e}_\rho - \frac{2}{3}\frac{z^3}{\rho}\vec{e}_\theta + (\theta\rho^2 - 2\theta z^2)\vec{e}_z$, ca soluție a sistemului

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{v} = \rho\vec{e}_\rho - 2z\vec{e}_z \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}.$$

Ca urmare, o soluție pe domeniul $\Delta : \rho > 0, \theta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}$ a sistemului dat este

$$\begin{aligned} \vec{v} = & \left(2\theta\rho z + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \vec{e}_\rho - \frac{2}{3}\frac{z^3}{\rho}\vec{e}_\theta + \\ & + \left(\theta\rho^2 - 2\theta z^2 + \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z. \blacksquare \end{aligned}$$

Observație. Toate problemele de mai sus au o infinitate de soluții. Determinarea tuturor acestor soluții necesită cunoștințe avansate de Ecuatii diferențiale.

Amănunte în legătură cu astfel de probleme se pot găsi în §12.7.